N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 4843

Article Principal
recouvrant en tout

La

THESE

De

DOCTORAT ES SCIENCES

Mathématiques

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

PAR

Denis de BRUCQ

pour obtenir le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse :

ETUDE DES OPERATEURS ALEATOIRES LINEAIRES D'UN ESPACE DE HILBERT DANS LUI-MEME

soutenue le 15 OCT. 1970 *devant la Commission d'Examen :*

M.M.	R. FORTET	*Président*
	E. ARNOUS	*Examinateurs*
	J. BASS	
	M. DEMAZURE	
	M. BOUIX	*Membre Invité*

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 4843

Article Principal
recouvrant en tout

La

THESE

De

DOCTORAT ES SCIENCES

Mathématiques

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

PAR

Denis de BRUCQ

pour obtenir le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse :

ETUDE DES OPERATEURS ALEATOIRES LINEAIRES D'UN ESPACE DE HILBERT DANS LUI-MEME

soutenue le .....devant la Commission d'Examen :

M.M.	R. FORTET	*Président*
	E. ARNOUS	*Examinateurs*
	J. BASS	
	M. DEMAZURE	
	M. BOUIX	*Membre Invité*

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523705_0013

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 2

CHAPITRE 0 - Compléments topologiques 5
§ 1 Topologie faible dans L 5
§ 2 Topologie forte dans L 6
§ 3 Topologie uniforme dans L 9
§ 4 Dualité 12
§ 5 Relation d'ordre pour les opérateurs linéaires symétriques et topologies 14

CHAPITRE 1 - Opérateurs aléatoires linéaires 17
§ 1 Introduction d'une σ-algèbre B dans L 17
§ 2 Applications mesurables 22
§ 3 Variables aléatoires à valeurs dans L 31
§ 4 Intégrabilité faible 35
§ 5 Espérance mathématique d'un opérateur aléatoire linéaire 38
§ 6 Convergence presque-sûre, convergence en probabilité 47
§ 7 Equi-intégrabilité, convergence en moyenne 54

CHAPITRE 2 - Intégration et espérance conditionnelle 58
§ 1 Mesures à valeurs dans L 58
§ 2 Espérance conditionnelle 71
§ 3 Fonctions aléatoires 76
§ 4 Martingales et suites centrées 80

CHAPITRE 3 - Familles spectrales aléatoires 86
§ 1 Fonctions caractéristiques marginales 87
§ 2 Conditions nécessaires d'invariance 96
§ 3 Probabilité additive normale 101
§ 4 Opérateurs aléatoires linéaires, symétriques et compacts 104
§ 5 Représentation de GELFAND d'un opérateur aléatoire linéaire commutant presque-sûrement avec lui-même 112

CHAPITRE 4 - Applications 118
§ 1 Semi-groupes aléatoires 118
§ 2 Opérateurs densités en mécanique quantique 120
§ 3 Equations différentielles linéaires à coefficients aléatoires 127

CONCLUSION 140

BIBLIOGRAPHIE 142

NOTATIONS 144

■

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma très respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur FORTET qui a dirigé cette thèse, m'a encouragé dans son élaboration, et a bien voulu présider le Jury. Je remercie également Monsieur NEVEU et Mademoiselle MOURIER, Professeurs, dont les observations et les suggestions m'ont été des plus précieuses.

Monsieur le Professeur DEMAZURE a bien voulu me donner le deuxième sujet de thèse et guider mes pas dans le domaine des équations diophantiennes. Je l'en remercie bien vivement.

Je remercie Monsieur le Professeur BASS qui s'est intéressé à ce travail ainsi que Monsieur le Professeur ARNOUS, d'avoir accepté de faire partie du Jury de cette thèse.

Je voudrais exprimer aussi à Monsieur le Professeur BOUIX, Directeur du Centre d'Etudes Théoriques de la Détection et des Communications, toute ma reconnaissance pour les facilités qu'il m'a accordées pour l'achèvement de ce travail.

En raison de mon séjour de cinq années au Chili où les recherches présentées ici, ont été effectuées, c'est avec nostalgie que j'exprime ici toute ma gratitude à Monsieur Enrique d'ETIGNY, Doyen de la Faculté de Ciencias, Fisicas y Matematicas de Santiago du Chili pour sa très grande compréhension et à Monsieur Enrique CANSADO, Directeur du Centre Interaméricano de Ensenanza de Estadistica, pour son amical soutien. Je tiens également à remercier Monsieur Jorge ALVAREZ de ARAYA, actuellement Professeur à Valdivia, dont la collaboration journalière m'a été précieuse dans une grande partie de cette thèse.

INTRODUCTION

Ce travail consiste en premier lieu à étendre les résultats classiques de la théorie des probabilités pour les variables aléatoires réelles, au cas où les variables aléatoires prennent leurs valeurs dans l'espace L des opérateurs linéaires bornés sur un espace H de Hilbert. Cet espace sera supposé le plus souvent séparable.

Pour ce faire, nous rappelons dans le chapitre 0, les propriétés topologiques essentielles de l'espace L, qui seront utiles par la suite. En particulier, dans le paragraphe 0-5, nous soulignons la faiblesse de la notion d'ordre dans le sous-ensemble L_s de L, où L_s désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés symétriques.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace quelconque de probabilité, après avoir introduit au paragraphe I-1, de façon intrinsèque, une σ-algèbre B de Boole dans l'ensemble L, nous considérons les applications mesurables $L(.): \omega \to L(\omega)$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans (L, B). L'idée directrice de ce travail est d'utiliser systématiquement la famille suivante de vecteurs aléatoires $\{\omega \to L(\omega)\, x, \forall\, x \in H\}$ pour obtenir les propriétés de l'application mesurable $L(.)$.

Par ce moyen, nous définissons dans le chapitre I, des opérateurs aléatoires linéaires (en abrégé O.A.L.) intégrables. Tout opérateur aléatoire linéaire Bochner intégrable, c'est-à-dire tel que l'intégrale $\int \|L(\omega)\| \, dP(\omega)$ existe et soit finie, est un O.A.L. intégrable (un contre-exemple montre que la réciproque est fausse) et tout O.A.L. intégrable est faiblement intégrable.

Dans le chapitre II, nous donnons quelques propriétés des mesures σ-additives à valeurs dans L. Le théorème II-1-2 analogue au théorème de Radon-Nikodym pour les variables aléatoires réelles nous permet de définir une espérance conditionnelle d'un O.A.L. intégrable relativement à une sous σ-algèbre quelconque de $\mathcal{A}$.

Par le procédé des martingales, nous obtenons des conditions suffisantes de convergence pour la topologie forte d'une suite centrée d'O.A.L. Quelques résultats de cette partie ont été énoncés dans la Note suivante C. R. Acad. Sc. Paris t 267 pp 997-999 (23 déc. 1968) série A.

En second lieu, ce travail indique les propriétés particulières des O.A.L. symétriques n'ayant pas d'équivalent lorsque les variables aléatoires sont réelles. Soit B_s la σ-algèbre de Boole des sous-ensembles de L_s, et éléments de B, que nous pouvons noter $B_s = B \cap L_s$.

Supposons que notre O.A.L. ait ses valeurs dans L_s. Pour tout ω de Ω, l'opérateur linéaire symétrique borné L (ω) présente une famille spectrale $\{E_\lambda(\omega), \lambda \in \mathbb{R}\}$ qui est invariante lorsque, quel que soit l'opérateur linéaire unitaire U, l'opérateur L (ω) est remplacé par l'opérateur U L (ω) U^{-1}. Les paragraphes 1-2-3 du chapitre III étudient l'existence d'une probabilité dans (L_s, B_s), invariante lorsque chaque L est remplacé par ULU^{-1}. Une telle probabilité sera dite " intrinsèquement invariante". Nous démontrons aussi l'existence d'une " probabilité additive normale" qui est presque une probabilité intrinsèquement invariante.

En statistique, on considère des matrices carrées n x n dont les coefficients sont des variables aléatoires complexes. A chaque matrice carrée symétrique n x n correspond une suite de n valeurs propres. Appelons $L_{s,n}$ l'ensemble des matrices carrées symétriques que nous munissons d'une σ-algèbre $B_{s,n}$. Si la matrice carrée est aléatoire dans $L_{s,n}$, la suite des n valeurs propres devient alors aléatoire.

Dans plusieurs articles, en particulier J. Ginibre, J. Math. Phys. 6 N° 3, 1965, on étudie le passage à la limite des probabilités intrinsèquement invariantes dans $L_{s,n}$ ainsi que le passage à la limite des probabilités correspondantes pour la suite des valeurs propres. Ce problème peut être avantageusement posé en considérant chacun des espaces $(L_{s,n}, B_{s,n})$ comme isomorphe à une partie de l'espace L_c des opérateurs symétriques compacts de L muni de la σ-algèbre $B_c \overset{\text{def}}{=} B_s \cap L_c$. L'ensemble L_c est identifiable à un produit de deux ensembles, c'est-à-dire $L_c = L_\lambda \times L_U$, et la σ-algèbre B_c est identifiable à une sous-σ-algèbre d'un produit $B_\lambda \otimes B_U$. Les définitions des deux espaces probabilisables (L_λ, B_λ) et (L_U, B_U) sont données au paragraphe III-4.

D'après la théorie de la représentation de Gelfand des * algèbres de Banach, commutatives, s'il existe un ensemble N négligeable de $\mathcal{A}$ tel que $\forall\ \omega, \omega' \in N^c$, L ($\omega$) L ($\omega'$) = L ($\omega'$) L ($\omega$), nous vérifions, dans le paragraphe III-5, que L (.) est égal presque-sûrement à $\int f(.,\lambda)\, d E_\lambda$ où E_λ est une famille spectrale fixée sur l'espace de Gelfand et où $f(.,\lambda)$ est une fonction aléatoire mesurable convenable.

Finalement, dans le chapitre IV, nous présentons trois applications possibles de la théorie antérieure des O.A.L. Dans l'étude des semi-groupes (T (t), $t \in [0, +\infty]$) d'opérateurs linéaires bornés de H dans H on introduit, pour les semi-groupes fortement continus de la variable t, la transformée de Laplace $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)\, dt$, à l'aide d'une intégrale de Riemann. Cette transformée peut être définie dans des cas plus généraux, en utilisant la notion d'intégrale présentée au paragraphe I-5.

Par ailleurs, la notion de semi-groupes aléatoires peut être nécessaire : c'est une fonction aléatoire du temps $t \in [0, \infty]$ à valeurs dans L, telle que chaque trajectoire soit un semi-groupe.

Dans ce cas, l'opérateur infinitésimal du semi-groupe aléatoire dépend de ω et constitue un exemple d'opérateur linéaire non borné aléatoire.

Pour un système quantique donné, l'opérateur ρ de densité, décrit l'état du système à un instant initial t_o. Soit H l'espace de Hilbert supposé séparable des états purs du système. Cet opérateur de densité prend la forme $\rho = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n |x_n> <x_n|$ où $|x_n> <x_n|$ est le projecteur sur l'état pur $|x_n>$ et où p_n est la probabilité de l'état pur $|x_n>$. Aussi pouvons-nous considérer l'opérateur densité comme l'espérance mathématique d'un projecteur aléatoire $|x> <x|$ avec $x \in H$. Bien que tout opérateur densité ρ puisse s'écrire sous la forme ci-dessus, ρ peut être aussi l'espérance mathématique du projecteur $|x> <x|$ par rapport à d'autres probabilités non discrètes. Ces probabilités peuvent alors être déterminées par des propriétés analytiques par exemple ces probabilités peuvent être invariantes lorsque le système évolue au cours du temps.

Considérons l'opérateur différentiel $\tau = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^i$ où les coefficients $a_i(t)$, $i = 0, \ldots n$ sont des fonctions complexes de classe C^∞ pour $t \in [0, 1]$. Soit g une fonction complexe de t définie dans $[0, 1]$.

Pour des hypothèses supplémentaires convenables, la solution f (t) de l'équation $\tau f = g$ sujette à n conditions de frontière peut s'exprimer à l'aide d'un opérateur T linéaire non borné dans l'espace de Hilbert L^2 ($[0, 1]$). Cet opérateur dépend des coefficients de τ et des conditions de frontière en 0 et en 1. Si les coefficients sont partiellement indéterminés ou plus précisément s'ils sont des fonctions aléatoires de t, ou si les conditions de frontière sont aléatoires, l'opérateur T devient alors aléatoire. Dans le cas où l'opérateur T est presque-sûrement auto-adjoint, nous donnons une définition précise d'un opérateur aléatoire linéaire auto-adjoint non borné et nous exprimons la solution f fonction aléatoire du temps de l'équation $\tau f = g$, à partir de cet opérateur T.

Pour terminer, remarquons que deux des applications, font intervenir de façon naturelle des opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert. Une étude générale des opérateurs aléatoires linéaires non bornés reste à effectuer.

CHAPITRE 0
COMPLEMENTS TOPOLOGIQUES

0-1 - Topologie faible dans L

Soit H un espace de HILBERT de base $\{e_i, i \in I\}$ où I est un ensemble quelconque d'indices. Si H est séparable alors l'ensemble d'indices I, est remplacé par $\mathbb{N}$ et la base s'écrit $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$. Soit L l'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis sur H et à valeurs dans H. Dans l'espace L, introduisons les semi-normes :

$$\forall\ x,\ y \in H \qquad q_{x,\,y}(L) = |\langle Lx, y\rangle|$$

La topologie faible est la topologie la plus faible telle que cependant toutes les semi-normes $q_{x,\,y}$ avec $x, y \in H$, soient continues. La topologie faible est la topologie de la convergence ponctuelle lorsque H est muni de la topologie faible. D'après [38] p. 16, th. 1-9, l'espace L muni de la topologie faible est un espace vectoriel topologique localement convexe. Nous noterons L_1 l'espace L muni de la topologie faible. L'espace L_1 est régulier [38]. L'espace L_1 est de HAUSDORFF.

Théorème 0-1-1

Soit $f : (x, y) \to f(x, y)$ de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$, linéaire en x et antilinéaire en y. Si $\forall\ x, y \in H$, $|f(x, y)| \leqslant K \|x\| \|y\|$ pour une certaine constante K fixée, la fonction f détermine un opérateur L de L de façon que $\forall\ x, y \in H$,

$$f(x, y) = \langle Lx, y\rangle \text{ et } \|L\| \leqslant K$$

Théorème 0-1-2

L'espace L_1 est complètement régulier.

Un espace topologique X est dit complétement régulier si X est Hausdorff et si $\forall\ x \in X$ et $\forall$ F fermé de X qui ne contient pas x, il existe une fonction f continue sur X, à image dans [0,1] et telle que $f(x) = 0$ et $f(F) = 1$.

Théorème 0-1-3

L'espace L_1 n'est pas tonnelé.

Démonstration :

L'espace L_1 est tonnelé si toutes les semi-normes continues inférieurement sur L_1, sont continues (cf [38] p. 83, th. 4-9). La fonction $L \longrightarrow \sup_{\|y\|=1} |< Lx, y >|$ est continue inférieurement et est une semi-norme. Cependant, elle n'est pas continue L_1.■

0-2 - Topologie forte dans L

Dans l'espace L introduisons les semi-normes :

$$\forall x \in H \qquad p_x(L) = \sup_{\|y\|=1} q_{x,y}(L)$$

La topologie forte est la topologie la plus faible telle que cependant toutes les semi-normes $p_x(L)$ soient continues. Remarquons que $\sup_{\|y\|=\rho} |< Lx, y >| = \rho\, p_x(L)$ et par suite $p_x(L) = \sup_{\|y\|\leqslant 1} q_{x,y}(L)$.
L'espace L muni de la topologie forte sera noté L_2. La topologie forte est plus fine que la topologie faible.

Théorème 0-2-1

Le vecteur Lx est de norme $\|Lx\| = \sup_{\|y\|=1} |< Lx, y >|$. Par suite $p_x(L) = \|Lx\|$ et la topologie forte dans L est la topologie de la convergence ponctuelle lorsque H est muni de la topologie de la norme. Comme dans le cas de la topologie faible, l'espace L_1 est un espace vectoriel topologique, localement convexe, régulier et de Hausdorff.

Théorème 0-2-2

Si H est séparable, l'espace L_2 est séparable.

Lemme 1 :

Soit P_n l'opérateur de H dans H projection sur H_n où H_n est le sous-espace de HILBERT engendré par les vecteurs de base $e_1, e_2..e_n$.
L'opérateur $Q_n \overset{\text{def}}{=} I\text{-}P_n$ tend fortement vers zéro quand n tend vers l'infini.

Démonstration :

Tout vecteur x est de la forme $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ où $c_k = < x, e_k >$.
De plus $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$. Etudions $Q_n x$ quand n tend vers l'infini.

$$Q_n\ x = (1 - P_n)\ x = (1 - P_n) \sum_{k=1}^{\infty} c_k\ e_k = \sum_{n+1}^{\infty} c_k\ e_k$$

$$||\ Q_n\ x\ ||^2 = < \sum_{n+1}^{\infty} c_k\ e_{k'}\ \sum_{n+1}^{\infty} c_k\ e_k > = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\ c_k\ |^2$$

et quand n tend vers l'infini, le reste de la série convergente tend vers zéro. Nous avons donc montré que pout tout vecteur x, la suite Q_n x de vecteurs tend vers zéro dans H ce qui est la convergence forte pour la suite Q_n de L.■

Lemme 2:

L'espace des matrices finies relativement à une base $\{e_n; n \epsilon \mathbb{N}\}$ est dense dans L pour la convergence forte.

Démonstration :

Introduisons $P_n\ L\ P_n = L_n$; c'est un opérateur de H_n dans H_n qui correspond donc à une matrice finie. Etudions pour tout x, la norme de $(L - L_n)\ x$:

$$||(L - L_n)\ x\ || = ||(1 - P_n)\ L\ x + P_n\ L\ (1 - P_n)\ x\ ||$$

Posant $Q_n = 1 - P_n$, nous majorons le dernier membre :

$$||(L - L_n)\ x\ || \leqslant ||\ Q_n\ L\ x\ || + ||\ P_n\ L\ ||\ ||\ Q_n\ x\ ||$$

Si $y = L\ x$, nous obtenons la nouvelle majoration:

$$||(L - L_n)\ x\ || \leqslant ||\ Q_n\ y\ || + ||\ P_n\ ||\ ||\ L\ ||\ ||\ Q_n\ x\ || \leqslant$$

$$||\ Q_n\ y\ || + ||\ L\ ||\ ||\ Q_n\ x\ ||$$

La norme de L est finie puisque L est un opérateur de L et par conséquent quand n tend vers l'infini $||\ (L - L_n)\ x\ || \to 0$ pour tout x d'après le lemme antérieur.■

Pour terminer la démonstration du théorème, maintenant que nous avons les résultats des deux lemmes, il suffit de remarquer que les matrices carrées de dimension n à coéfficients rationnels constituent un ensemble dénombrable dense pour l'espace vectoriel des matrices de dimension n. L'union sur n de toutes ces matrices à coefficients rationnels est dénombrable et dense pour l'espace vectoriel des matrices finies qui, lui-même est dense dans L_2.■

Corollaire :

Si H est séparable, l'espace L_1 est séparable.
La fermeture forte de l'ensemble des matrices finies à coefficients rationnels est un sous-ensemble de la fermeture faible de ce même ensemble.

Théorème 0-2-3

Soit L_n une suite d'opérateurs de L, dont les normes sont bornées par un nombre fixe K. Si pour tous les vecteurs $y \in H_0$ d'un sous ensemble dense de H, L_n y tend vers Ly en norme dans H où L est un opérateur de L, la suite L_n tend fortement vers L.

Démonstration :

Soit x un vecteur quelconque de H et soit y_k une suite tendant vers x. Etudions la limite de la norme du vecteur $(L_n - L)\, x$:

$$\| (L_n - L)\ x \| \leqslant \| (L_n - L)\ y_k \| + \| L_n (x - y_k) \| + \| L (x - y_k) \|$$

La suite L_n est bornée. Par conséquent, majorons les différents termes :

$$\| (L_n - L)\ x \| \leqslant \| (L_n - L)\ y_k \| + K \| x - y_k \| + \| L \| \| y - y_k \|$$

On choisit k en premier lieu de façon que les deux derniers termes soient inférieurs à $\frac{\epsilon}{3}$ et ensuite on prend n suffisamment grand pour que

$$\| (L_n - L)\, y_k \| \leqslant \frac{\epsilon}{3} \quad \blacksquare$$

Un sous ensemble M de L est dit borné s'il est absorbé par tous les voisinages de zéro. Supposons que L soit localement convexe. Il existe alors une famille de semi-normes q_i (L) définissant la topologie. (cf [38] page 16, th. 1-9).

Lemme :

Pour qu'un sous ensemble M de L soit borné il faut et il suffit que quel que soit q_i, il existe une constante K_i telle que q_i (L) $\leqslant K_i$ pour tout L de M.

Ce lemme sert à reconnaître pour la topologie faible et la topologie forte, les ensembles bornés. Un ensemble M est faiblement borné si et seulement si pour tout x et pour tout y ainsi que pour tout L de M, il existe $K_{x,y}$ tel que $| < L\, x, y > | \leqslant K_{x,y}$. Un ensemble M est fortement borné si et seulement si pour tout x ainsi que pour tout L de M, il existe K_x, tel que :

$$\| L_x \| \leqslant K_x$$

Théorème 0-2-4

Un ensemble borné faiblement est borné fortement.

Théorème 0-2-5

L'espace L_2 est complètement régulier.

Théorème 0-2-6

La sphère $S^* = \{L;\ ||\ L\ ||\leqslant 1\}$ de l'espace L_2, n'est pas fortement compacte.

On notera $S^*_N = \{L;\ ||\ L\ ||\leqslant N\}$ la sphère de rayon N.

Théorème 0-2-7

L'espace L_2 n'est pas tonnelé.

0-3 - Topologie uniforme dans L.

La topologie uniforme est définie par la norme :

$$||\ L\ || = \sup_{||\ x\ ||\ =\ 1} ||\ Lx\ || = \sup_{||\ x\ ||\ =\ 1} \sup_{||\ y\ ||\ =\ 1} |\ <Lx,\ y>\ |$$

L'espace $L\ (H,\ H)$ des opérateurs linéaires bornés de H dans H muni de la topologie uniforme c'est-à-dire de la convergence uniforme sur tout borné est une algèbre de BANACH (cf [39], p. 221, th. B.). L'espace L muni de la topologie uniforme est noté L_4. En résumé, nous ne considérerons que les espaces L_1, L_2, L_4, correspondant aux topologies T_1, T_2, T_4, c'est-à-dire faible, forte et uniforme.

Théorème 0-3-1

Un ensemble borné fortement est borné uniformément.

Démonstration :

D'après le lemme précédent le théorème 0-2-4, un sous ensemble M de L est borné fortement si et seulement si pour tout vecteur x de H, la famille $||\ L\ x\ ||$ où L est un opérateur quelconque de M, est majoré par une constante K_x, finie, pouvant dépendre de x.

D'après le théorème 0-2-1, la topologie forte est la topologie dans L, de la convergence ponctuelle lorsque H est muni de la topologie de la norme tandis que la topologie uniforme est la topologie de la convergence sur tout borné. Utilisons le corollaire 4, 11, page 85 de [38] et tout sous ensemble M de L, borné pour la convergence forte est borné pour la convergence uniforme.■

Remarque : L'espace L muni de l'une des trois topologies T_1, T_2, T_4 est l'union dénombrable de bornés : $L = \bigcup_N S_N^*$. On peut dire que L_1, L_2, L_4 sont σ-bornés.

Théorème 0-3-2

Dans l'espace L muni de la topologie forte, les suites de Cauchy convergent.

Démonstration :

Soit L_n une suite de Cauchy pour la convergence forte, c'est-à-dire, pour tout x la suite $|| (L_m - L_n) x ||$ tend vers zéro quand m et n tendent vers l'infini.

Les vecteurs $z_{n,x} = L_n x$ de H forment une suite de Cauchy et l'espace de Hilbert H étant complet, soit z_x la limite de la suite :

$$z_x = \underline{\lim}_n \, z_{n,x}$$

Le vecteur z_x est défini pour tout x et l'application L qui à x, associe z_x est linéaire.

La suite de CAUCHY $\{L_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est fortement borné. D'après le th. 1, la suite est bornée en norme. Il existe K positif tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|| L_n || \leqslant K$; par suite pour tout x de S, $|| Lx || \leqslant K$ et $|| L || \leqslant K$. L'opérateur linéaire L est borné et c'est la limite forte de la suite de CAUCHY.■

Théorème 0-3-3

Dans l'espace L muni de la topologie faible, les suites de CAUCHY convergent.

Lemme :

Dans H muni de la topologie faible, les suites de CAUCHY convergent.

Théorème 0-3-4

La sphère $S^* = \{L;\ \| L \| \leqslant 1\}$ est compacte pour la topologie faible.

Théorème 0-3-5

L'espace L muni de la topologie faible est semi-réflexif mais n'est pas réflexif.

Démonstration :

Soit M un ensemble faiblement borné de L. Par les théorèmes 0-2-4 et 0-3-1 cet ensemble M est fortement borné et uniformément borné. Il est donc absorbé par la sphère $S^* = \{L;\ \| L \| \leqslant 1\}$. Les topologies faibles et faibles affaiblies sont les mêmes.

La sphère S^* est compacte pour la topologie faible d'après le Théorème 0-3-4 et par suite tout ensemble faiblement borné est faiblement relativement compact. D'après le théorème de Mackey (cf [38], page 89), l'espace L_1 est semi-réflexif.

Comme l'espace L_1 n'est pas tonnelé Théorème 0-1-3, il ne peut être réflexif.■

Théorème 0-3-6

Les espaces L_1 et L_2 ne sont pas de Baire et ne sont pas métrisables.

Démonstration :

En effet, un espace de Hausdorff, localement convexe comme le sont les deux espaces vectoriels topologiques L_1 et L_2, et de Baire, d'après [38], page 84, théorème 4-10 est tonnelé ce qui n'est le cas ni pour L_1 ni pour L_2. De la même façon un espace métrisable, semi-complet est de Baire. Les deux espaces L_1 et L_2 sont semi-complets mais non de Baire. Ils ne peuvent être métrisables.■

Théorème 0-3-7

Si H est séparable la sphère $S^* = \{L;\ \| L \| \leqslant 1\}$ de L_1 (ainsi que de L_2) est métrisable.

Corollaire :

Si H est séparable, les espaces L_1 et L_2 sont quasi-complets.

De nouveau, nous effectuerons la démonstration pour la topologie faible. Les ensembles bornés pour la topologie faible sont absorbés par la sphère $\{L;\ ||L|| \leqslant 1\}$. Par suite la topologie d'un ensemble faiblement fermé borné est induite par la topologie de la sphère $\{L;\ ||L|| \leqslant 1\}$ convenablement agrandie. Par suite toute partie faiblement fermée et bornée de L_1 est métrisable et grâce au théorème 0-3-3, est un espace uniforme complet.■

0-4 - Dualité

L'espace L étant muni des trois topologies satisfaisant les relations $T_1 < T_2 < T_4$, sur les duals topologiques de L_1, L_2 et L_4, nous avons les relations d'inclusion $(L_1)' \subset (L_2)' \subset (L_4)'$. Par définition le dual L^* algébrique de L est l'ensemble des formes linéaires de L dans $\mathbb{C}$ et le dual topologique L'_T de l'espace L muni de la topologie T est le sous-espace de L^* des formes linéaires continues de L_T dans $\mathbb{C}$. Le dual topologique est un sous-espace vectoriel de L^*. Si f est un élément de L^* continue pour T_1 alors f est continue pour T_2 et nous obtenons les inclusions signalées entre les trois duals.

Nous pouvons considérer pour tout x et tout y de H, l'application de L dans $\mathbb{C}$ notée $f_{x,y}(L) \overset{\text{def}}{=} \langle Lx, y \rangle$. Cette application est linéaire et continue si L est muni de la topologie faible. Pour la famille finie x_l, y_l où $l = 1 \ldots n$, nous pouvons associer l'application qui à L, associe $\sum_{l=1}^{n} f_{x_l, y_l}(L)$. Elle est linéaire et continue de L_1 dans $\mathbb{C}$. Par suite c'est un élément de $(L_1)'$.

D'après [5] n° 8 corollaire toute forme linéaire continue de L muni de la topologie forte, dans $\mathbb{C}$ s'exprime comme combinaison linéaire finie de formes $f_{x,y}(L)$. Par suite les duals faibles et forts coïncident et tout élément de ces duals s'exprime comme combinaison linéaire finie de formes $f_{x,y}(L)$.

Les théorèmes 0-2-4 et 0-3-1 expriment que les sous-ensembles de L, bornés faiblement sont bornés fortement et sont bornés en norme. Introduisons dans $(L_4)'$ la topologie de la convergence sur tout borné. Il est inutile de préciser pour laquelle des trois topologies, l'ensemble est borné.

L'espace $(L_4)'$ muni de cette topologie, est un espace de Banach d'après [39] p. 221 th B pour la norme $||f|| = \sup_{||L||=1} ||f(L)||$. La topologie induite dans $(L_1)' = (L_2)'$ par la topologie de $(L_4)'$ est la topologie de la convergence sur tout borné de L. L'espace $\tilde{L} \overset{\text{déf}}{=} (L_1)' = (L_2)'$ muni de la topologie de la convergence sur tout borné est un sous-espace topologique de $(L_4)'$, nous le notons $\tilde{L}_b$.

Le dual algébrique de $\tilde{L}_b$ est commun pour $(L_1)'_b$ et pour $(L_2)'_b$. D'après le théorème 0-3-5 l'espace L_1 est semi-réflexif et :

$$L = ((L_1)'_b)' = ((L_2)'_b)'$$

Par suite l'espace L_2 est semi-réflexif.

Si la boule unité de L, n'est pas fortement compacte d'après le théorème 0-2-6, elle est cependant compacte pour la topologie forte affaiblie puisqu'elle est fermée pour cette topologie et d'après le théorème de Mackey (cf [38] page 89).

La topologie forte affaiblie est aussi la topologie faible affaiblie puisque les deux duals $(L_1)'_b$ et $(L_2)'_b$ sont égaux; par suite la topologie forte affaiblie est plus faible que la topologie faible. Par ailleurs tout ouvert sous-basique de L_1 est de la forme $V = \{L; |<(L - L_o)x, y>| < \epsilon\}$ où $L_o \in L$, $x, y \in H$ et $\epsilon > 0$. Cet ouvert sous-basique s'écrit $V = \{L; |f_{x,y}(L - L_o)| < \epsilon\}$ qui est un ouvert pour la topologie forte affaiblie. La topologie forte affaiblie est la topologie faible de L.

CONCLUSION

Enonçons sur l'espace L_2, les résultats obtenus; L_2 est un E.V.T. localement convexe de HAUSDORFF, complètement régulier, semi-réflexif, semi-complet, non tonnelé et σ-borné. La topologie forte affaiblie est la topologie faible. La sphère S^* est faiblement compacte. Si H est séparable, S^* est métrisable et L_2 est quasi-complet.

0-5 - Relation d'ordre pour les opérateurs linéaires symétriques et topologies*

Le présent paragraphe consiste à établir les liens existants entre la relation d'ordre usuel de l'ensemble des opérateurs symétriques de L et les diverses topologies énumérées précédemment. On dit que l'opérateur symétrique L_1 est plus grand que l'opérateur symétrique L_2 si pour tout x de H, nous avons l'inégalité $< L_1 x, x > \geqslant < L_2 x, x >$. La relation d'ordre est compatible avec la somme. Pour le produit de deux transformations symétriques nous avons le théorème suivant (cf [36] page 263). L'inégalité $L_1 \geqslant L_2$ reste en vigueur si on multiplie les deux membres par la même transformation symétrique positive L', permutable avec L_1 et avec L_2. Nous appellerons L_s le sous-ensemble de L des opérateurs symétriques. Les opérateurs de ce paragraphe sont éléments de L_s.

Proposition 0-5-1

Soit S un sous-ensemble de L_s tel que pour tout A et pour tout B de L_s satisfaisant $A < B$, il existe $L \in S$ tel que $A < L < B$. Dans ces conditions S est dense dans L_s pour la convergence uniforme.

Démonstration :

Entre A et B, il existe un $L \in S$. Considérons alors $A + \frac{B - A}{n}$. Puisque $A < B$, nous avons $\frac{B - A}{n} > 0$ et $A < A + \frac{B - A}{n}$. Par suite, il existe L_n entre A et $A + \frac{B - A}{n}$. Les inégalités $A < L_n < A + \frac{B - A}{n}$ se transforment en $0 < L_n - A < \frac{B - A}{n}$ et passant aux normes $\| L_n - A \| \leqslant \frac{\| B - A \|}{n}$. Nous avons donc construit pour tout opérateur A en prenant par exemple $B = A + I$ une suite L_n d'opérateurs de S qui tend uniformément vers A. ■ Remarquons que si $A < B$ et si $L_n \xrightarrow{T_4} A$ cela n'implique pas comme dans les nombres réels que à partir d'un certain rang, $L_n < B$. En effet, choisissons A et B de façon que :

$$B - A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/n \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L_n - A = I\,\epsilon_n \text{ où } \epsilon_n \text{ tend vers zéro quand n tend}$$

vers l'infini. Nous avons d'une part $\| L_n - A \| = \epsilon_n$ qui tend vers zéro et d'autre part $L_n - A \not< B - A$ c'est-à-dire $L_n \not< B$.

* Ce paragraphe est dû principalement à Monsieur Alvarez de Araya.

Proposition 0-5-2

Pour la topologie uniforme, les deux ensembles $\{A;\ A \in L_s,\ A > 0$ et A inversible$\}$ et intérieur de $\{A;\ A \in L_s,\ A > 0\}$ sont égaux.

Démonstration :

Soit A_o un élément de l'ensemble $\{A;\ A > 0$ et A inversible$\}$. Pour tout vecteur x de H, $< A_o\, x,\ x > \ > \alpha(A_o) \| x \|^2$ où $\alpha(A_o) = \inf\{ \lambda\ ;\ \lambda \in \sigma(A_o)\}$. Dans l'expression ci-dessus $\sigma(A_o)$ est le spectre de l'opérateur symétrique A_o et comme A_o est inversible $O \notin \sigma(A_o)$ et $\alpha(A_o) \neq 0$. Prenons A dans un voisinage de A_o. Si $\| A - A_o \| < \alpha(A_o)$ alors :

$$< Ax,\ x > \ > (\alpha(A_o) - \| A - A_o \|) \| x \|^2 > 0$$

L'opérateur symétrique A est positif. L'opérateur A_o appartient à l'intérieur de l'ensemble $\{A;\ A > 0\}$.

Réciproquement :

Supposons que A_o, opérateur symétrique positif, ne soit pas inversible, il appartient donc au complémentaire dans l'ensemble $\{A;\ A > 0\}$ des opérateurs inversibles. Si A_o n'est pas inversible, son spectre $\sigma(A_o)$ contient O et par suite pour tout $\epsilon > 0$, il existe un vecteur x de H de norme 1 tel que $\| A_o\, x \| < \epsilon$. Considérons $A = A_o - \epsilon\, 1$. Cet opérateur est dans la sphère de centre A_o et de rayon ϵ puisque $\| A - A_o \| < \epsilon$. Cependant $< A\, x,\ x > = < A_o\, x,\ x > - \epsilon < x,\ x > < 0$ et l'opérateur A n'est pas positif. Dans tout voisinage de A_o, il existe un opérateur A qui n'appartient pas à l'ensemble $\{A;\ A > 0\}$ et A_o n'appartient pas à l'intérieur de l'ensemble $\{A;\ A > 0\}$.■

Corollaire :

Si $A < C_o < B$, si $B - C_o$ est inversible et si $C_o - A$ est inversible alors C_o appartient à l'intérieur de $\{C;\ A < C < B\}$.

Corollaire :

Si $A < B$ et si $B - A$ est inversible alors intérieur de $\{C;\ A < C < B\}$ est non vide.

Démonstration :

Si $B - A$ est inversible alors $C_o = \frac{A + B}{2}$ est tel que $A < C_o < B$ et $C_o - A$ ainsi que $B - C_o$ sont inversibles. Donc d'après le corollaire antérieur, C_o appartient à l'intérieur de $\{C;\ A < C < B\}$.■

Proposition 0-5-3

Si l'intérieur de l'ensemble $\{C;\ C \in L_s;\ A < C < B\}$ est non vide alors B - A est inversible.

Démonstration :

Soit C_o de l'intérieur de l'ensemble $\{C;\ A < C < B\}$. Par suite C_o appartient à l'intérieur de l'ensemble $\{C;\ A < C\}$ et $C_o - A$ à l'intérieur de l'ensemble $\{D;\ 0 < D\}$. D'après la proposition 0-5-2, l'opérateur symétrique $C_o - A$ est inversible. Par ailleurs $B - A > C_o - A$. Pour tout vecteur x, $< (B - A)\,x,\ x > \geqslant < (C_o - A)\,x,\ x >$ et $0 < \alpha\,(C_o - A) = \inf_{\|x\| = 1} |< (C_o - A)\,x,\ x >| \leqslant \inf_{\|x\| = 1} |< (B - A)\,x,\ x >| = \alpha\,(B - A)$. Par suite B - A est inversible.■

CONCLUSION

Une famille S séparant tout couple d'opérateurs symétriques A, B satisfaisant $A < B$ doit être dense dans L_s pour la topologie uniforme.

Une famille S dense pour la topologie uniforme sépare les opérateurs symétriques A, B satisfaisant $A < B$ si B - A est inversible.

■

CHAPITRE 1
OPERATEURS ALEATOIRES LINEAIRES

1-1 - Introduction d'une σ-algèbre B dans L

Dans tout ce paragraphe, nous nous fixons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nous désirons introduire des éléments aléatoires à valeurs dans L. Considérons une fonction $L(.): \omega \to L(\omega)$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe $L(\omega) \in L$. Remarquons que si $L(\omega) \in L$ alors $||L(\omega)|| < \infty$. L'équivalent pour les fonctions réelles de ω, est de supposer que la fonction ne prend pas les valeurs $+\infty$ et $-\infty$. Nous avons besoin pour définir les variables aléatoires à valeurs des éléments de L, d'une σ-algèbre que nous appellerons B dans L. Une fois l'ensemble L des opérateurs linéaires bornés de H dans H muni de la σ-algèbre B, nous introduisons les fonctions $L(\omega)$ mesurable de Ω dans L.

A tout vecteur x de H associons $< Lx, x >$ où L est un élément quelconque de L. Nous obtenons ainsi une application de L dans $\mathbb{C}$. Or l'espace $\mathbb{C}$ est muni d'une σ-algèbre C, la σ-algèbre des Boréliens. Nous construisons donc B_x σ-algèbre de L comme l'image réciproque de la σ-algèbre C de $\mathbb{C}$.

La plus petite σ-algèbre contenant toutes les σ-algèbres B_x quand x varie dans H sera la σ-algèbre B de L.

Au lieu de considérer un seul vecteur x, définissons l'application de L dans $\mathbb{C}$ qui, à $L \in L$, associe $< Lx, y >$ où y est un second vecteur fixé de H. L'espace complexe est muni de la σ-algèbre des boréliens et la σ-algèbre réciproque par l'application $L \to < Lx, y >$ sera notée $B_{x,y}$.

Soit B' la plus petite σ-algèbre contenant chacune des σ-algèbres $B_{x,y}$.

Théorème 1-1-1

Les σ-algèbres B et B' sont égales.

Démonstration :

Comme $B_x = B_{x,y}$, nous déduisons que $B \subset B'$.

Réciproquement $4 < L\,x, y > = < L\,(x + y), x + y > - < L\,(x - y), x - y > + \hat{\imath} < L\,(x + \hat{\imath}\,y), x + \hat{\imath}\,y > - \hat{\imath} < L\,(x - \hat{\imath}\,y), x - \hat{\imath}\,y >$ par conséquent $< Lx, y >$ est B-mesurable comme combinaison linéaire de fonctions B - mesurables. $B_{x, y}$ est une sous σ-algèbre de B et B' la plus petite σ-algèbre contenant $\forall x,y\ B_{x, y}$, est contenu dans B.■

Dans l'espace de Hilbert H, il existe une infinité de bases orthonormées. Soit $\{e_i\ i \in I\}$ une telle base. Par rapport à cette base, les opérateurs $L \in L$ sont définis par la famille de coefficients:

$$L_{i, j} = < Le_j, e_i > \qquad i, j \in I$$

En effet pour un vecteur x quelconque de H comme L est borné, chacun des produits scalaires $< Lx, e_j >$ existe et si $x = \sum_i x_i e_i$ alors:

$$Lx = \sum_j \left(\sum_i x_i L_{j, i}\right) e_j$$

De la même façon:

$$< Lx, x > = \sum_{i, j} x_i \bar{x}_j L_{j, i}$$

Pour tout e_i et tout e_j, introduisons $L^{-1}_{i, j}(C)$ comme image réciproque de C. Comme précédemment c'est une σ-algèbre. Soit B'' la plus petite qui contient chacune des σ-algèbres $L^{-1}_{i, j}(C)$.

Théorème 1-1-2

Les σ-algèbres B et B'' sont égales.

Démonstration :

Il est immédiat que B'' est une sous σ-algèbre de $B' = B$. Démontrons la réciproque; l'espace L est l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de H dans H. Pour tout vecteur x de H, dans la somme $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, la famille J des indices i tels que le coefficient x_i est non nul, est dénombrable (cf [39] page 253). Par suite, $< Lx, x > = \sum_{x_i \in J} x_j \bar{x}_i L_{i, j} = \sum_{x_j \in J} x_j \bar{x}_i L_{i, j}$. La notation correspond à une limite dans $\mathbb{C}$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I x I et de J x J. Comme J x J est dénombrable, nous remplaçons cette limite par une limite ordinaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Or chaque application $L_{i, j}$ est B''-mesurable et par conséquent $< Lx, x >$ est aussi B''-mesurable. Pour tout x de H, la fonction $< Lx, x >$ de L dans $\mathbb{C}$ est B-mesurable. La σ-algèbre B qui est la plus petite σ-algèbre telle que toutes les fonctions $< Lx, x >$ soit mesurable, est donc contenue dans B''. Par conséquent $B = B''$.■

Nota :

Pour démontrer la réciproque, nous avons eu besoin de la propriété suivante : L étant borné, pour tout x_i le vecteur L x_i existe et :

$$<Lx, x> = \sum_{i,j} x_j \, \bar{x}_i \, L_{i,j}$$

A tout opérateur L de L correspond, par conséquent, une famille $L_{i,j}$ de nombres complexes avec $(i, j) \in I \times I$. A tout opérateur L, nous associons un élément de $\prod_{i,j} \mathbb{C}$ produit de $\mathbb{C}$ par lui même, le produit étant effectué sur tous les indices $(i, j) \in I \times I$. Cette application est injective mais n'est pas surjective puisque les opérateurs de L sont bornés..

Théorème 1-1-3

Si on identifie L à son image dans $M = \prod_{i,j} \mathbb{C}$, la σ-algèbre B est induite dans L, par la σ-algèbre produit $\otimes C_{i,j}$ des σ-algèbres des boréliens $C_{i,j}$ des différentes coordonnées..

Lemme 1

Soient S une semi-algèbre de Boole de l'ensemble Ω, et C un sous ensemble de Ω. Les ensembles de type $A \cap C$ où $A \in S$, forment une semi-algèbre de Boole induite par S dans C. L'algèbre engendrée par la semi-algèbre induite par S dans C coincide avec l'algèbre induite dans C par l'algèbre engendrée par S.

Avec des notations évidentes, le lemme correspond à la commutativité du graphique :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{A}(S) \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ S \cap C & \xrightarrow[\mathcal{A}]{} & \mathcal{A}(S \cap C) = \mathcal{A}(S) \cap C \end{array}$$

Démonstration :

$\mathcal{A}$ est composée des ensembles de la forme $\sum_J S_i$ où la famille d'indices J, est finie et les S_i deux à deux sans points communs (cf [30] page 25 proposition 1-6-1)

$$\sum_J (S_i \cap C) = (\sum_J S_i) \cap C \quad \blacksquare$$

Lemme II

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole de l'ensemble Ω et C un sous ensemble quelconque de Ω. Les ensembles du type $A \cap C$ où $A \in \mathcal{A}$, forment l'algèbre de Boole induite par $\mathcal{A}$ dans C. La σ-algèbre engendrée par l'algèbre induite par $\mathcal{A}$ dans C coincide avec la σ-algèbre induite dans C par la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$.

Comme précédemment le graphique suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\sigma}{\longrightarrow} & \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & \sigma(\mathcal{A}) \\ \cap\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} \cap C & \longrightarrow & \sigma(\mathcal{A} \cap C) = \sigma(\mathcal{A}) \cap C \\ & \underset{\sigma}{\longrightarrow} & \end{array}$$

Démonstration :

Il s'agit de démontrer que $\sigma(\mathcal{A}) \cap C \subset \sigma(\mathcal{A} \cap C)$ ainsi que $\sigma(\mathcal{A} \cap C) \subset \sigma(\mathcal{A}) \cap C$. Or, il vient immédiatement que $\sigma(\mathcal{A}) \cap C$ est est une σ-algèbre et contient les ensembles de $\mathcal{A} \cap C$ donc $\sigma(\mathcal{A} \cap C) \subset \sigma(\mathcal{A}) \cap C$. Par ailleurs, soit $B = \{B;\ B \cap C \in \sigma(\mathcal{A} \cap C)$ et $B \in \sigma(\mathcal{A})\}$. Cet ensemble est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{A}$, par suite $B = \sigma(\mathcal{A})$ et $\sigma(\mathcal{A}) \cap C \subset \sigma(\mathcal{A} \cap C)$. ■

Maintenant que les deux lemmes préliminaires sont démontrés, passons au théorème.

La σ-algèbre de $\prod_{i,j} \mathbb{C}_{i,j}$ est engendrée par les différentes σ-algèbres des boréliens des espaces $\mathbb{C}$ coordonnées. Plus précisément $\{\prod_{i,j} A_{i,j}$, si $i, j \in K$, $A_{i,j} \in C_{i,j}$ et si $i,j \notin K, A_{i,j} = \mathbb{C}_{i,j}\}$ avec K ensembles finis d'indices est la semi-algèbre de Boole engendrant la σ-algèbre de $\prod_{i,j} \mathbb{C}_{i,j}$. Considérons l'intersection avec L de cette semi-algèbre :

$$\prod_{i,j} A_{i,j} \cap L = \{L;\ L \in L, \forall_{i,j}\ L_{i,j} \in A_{i,j}\}$$

$$= \bigcap_{i,j \in K} \{L;\ L \in L,\ L_{i,j} \in A_{i,j}\}$$

L'intersection ne porte que sur un nombre fini d'indices. Ces ensembles sont des cylindres et constituent une semi-algèbre de Boole. La σ-algèbre qu'elle engendre, est précisément B.

Par conséquent, les deux lemmes démontrent le théorème. ■

Théorème 1-1-4

Si l'espace de HILBERT est séparable, en identifiant L à son image dans $M = \prod_{i,j} \mathbb{C}_{i,j}$, l'ensemble L appartient à la σ-algèbre produit $\bigotimes_{i,j} C_{i,j}$ des σ-algèbres des boréliens des différentes coordonnées.

Soit I un ensemble d'indices quelconque et J une partie finie de I. Si H_J est l'espace de HILBERT engendré par $\{e_i;\ i \in J\}$, définissons P_J comme le projecteur sur H_J.

Lemme :

Un élément L de M appartient à L si et seulement si l'ensemble $\{\| P_J\ L\ P_J \|;\ J$ partie finie de $I\}$ est borné.

Démonstration :

Soit L un opérateur linéaire borné. Pour tout J partie finie de I, nous avons $\| P_J\ L\ P_J \| \leqslant \| P_J \|\ \| L \|\ \| P_J \| \leqslant \| L \|$. Réciproquement, supposons que l'ensemble $\{\| P_J\ L\ P_J \|;\ J$ partie finie de $I\}$ soit borné par une constante K positive. Pour tout vecteur x de H, nous avons en posant $L_J = P_J\ L\ P_J$:

$$\| L_J\ x \|^2 = \sum_{i \in J} \Big| \sum_{j \in J} L_{i,j}\ x_j \Big|^2 \leqslant \| L_J \|^2\ \| x \|^2 \leqslant K^2\ \| x \|^2$$

Par suite $\forall\ x \in H,\ \forall\ i \in I\ \Big| \sum_{j \in J} L_{i,j}\ x_j \Big| \leqslant K\ \| x \|$. Le vecteur x étant donné, considérons le vecteur $y = \sum_I y_j\ e_j \overset{\text{def}}{=} \sum_I x_j\ e^{i\theta_j}\ e_j$ où les nombres réels θ_j sont choisis de façon que $L_{i,j}\ y_j = L_{i,j}\ e^{i\theta_j}\ x_j$ soit égale à $| L_{i,j}\ x_j |$. Dans ces conditions pour tout i de I, on a ;

$$\Big| \sum_{j \in J} L_{i,j}\ x_j \Big| \leqslant \sum_{j \in J} | L_{i,j}\ x_j | = \sum_{j \in J} L_{i,j}\ y_j$$
$$= \Big| \sum_{j \in J} L_{i,j}\ y_j \Big| \leqslant K\ \| y \|$$

Comme les vecteurs x et y ont même norme, la série $\sum_I L_{i,jj}\ x_j$ est sommable de somme inférieure ou égale à $K\ \| x \|$. En revenant à l'inégalité A et par deux passages à la limite, nous obtenons successivement que :

$$\sum_{i \in J} \Big| \sum_{j \in I} L_{i,j}\ x_j \Big|^2 \leqslant K^2\ \| x \|^2$$
$$\sum_{i \in I} \Big| \sum_{j \in I} L_{i,j}\ x_j \Big|^2 \leqslant K^2\ \| x \|^2$$

Interprétons le résultat en écrivant que $\forall\ x \in H$, $L\ x = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} L_{i,j}\ x_j\ e_i$ est de norme inférieure ou égale à $K\ ||\ x\ ||$. Par suite $||\ L\ || \leqslant K$.

Comme cette inégalité est vérifiée pour toute majorante K de l'ensemble $\{||\ P_J\ L\ P_J\ ||$; J partie finie de I$\}$ nous obtenons même que $||\ L\ || \leqslant \sup \{||\ P_J\ L\ P_j;\ J \subset I,\ J$ partie finie$\}$. La directe implique l'égalité.■

Démonstration du théorème :

Sous réserve que l'espace L soit séparable, la base $\{e_i,\ i \in I\}$ comprend une famille dénombrable de vecteurs et l'ensemble des parties finies J de I est dénombrable. Par conséquent :

$$\{L;\ ||\ L\ ||\ < \infty\} = \bigcup_{N} \bigcap_{\substack{J \subset I \\ J \text{ partie finie}}} \{L;\ ||\ L_J\ ||\ \leqslant N\}$$

Or l'ensemble $\{L;\ ||\ L_J\ ||\ \leqslant N\}$ est un cylindre de M à base mesurable puisque L_J est borné à priori et pour $\{x_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ suite dense dans H,

$$||\ L_J\ || = \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{||\ L_J\ x_m\ ||}{||\ x_m\ ||}\ ■$$

1-2 - Applications mesurables

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et L (.) une fonction de Ω dans L.

Définition 1-2-1

Une fonction L (.) de Ω dans L est mesurable par rapport aux σ-algèbres $\mathcal{A}$ de Ω et B de L si l'image réciproque de tout ensemble B de B par l'application L (.) est un ensemble de $\mathcal{A}$.

Au cas où L (.) est borné uniquement sur un sous-ensemble de Ω, nous disons que L (.) est mesurable de Ω dans $L = L + \{\infty\}$ si l'ensemble D sur lequel L (.) est borné, appartient à $\mathcal{A}$ et si comme application de D dans L, la fonction L (.) est mesurable au sens de la définition précédente par rapport aux σ-algèbres $\mathcal{A} \cap D$ de D et B de L.

Théorème 1-2-1

Une application L (.) de Ω dans L est mesurable si et seulement si pour tout couple x, y de vecteurs de H, l'application $< L\ (.)\ x, y >$ de Ω dans $\mathbb{C}$ est mesurable.

Démonstration :

Si la fonction L (.) de Ω dans L est mesurable et comme l'application $L \to < Lx, y >$ de L dans $\mathbb{C}$ est mesurable, l'application composée $< L(.)x, y >$ est mesurable.

Réciproquement :

La σ-algèbre B de L est la plus petite des σ-algèbres de L telles que toutes les applications $L \to < Lx, y >$ soient mesurables. Pour tout couple x, y de vecteurs de H et pour tout borélien C de $\mathbb{C}$ considérons successivement :

$\{ L : < Lx, y > \epsilon C \} = B$ ainsi que

$\{\omega ; < L(\omega)x, y > \epsilon C\} = A$. Par construction nous avons $L^{-1}(B) = A$. Or l'ensemble des B est une classe engendrant la σ-algèbre B, l'ensemble des A engendre une σ-algèbre $\mathcal{A}'$, sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ par hypothèse de la réciproque. D'après [30], page 30 lemme, les deux σ-algèbres $\mathcal{A}'$ et $L^{-1}(B)$ sont égales et par suite $L^{-1}(B) \subset \mathcal{A}$.

Corollaire 1

Une application L (.) de Ω dans L est mesurable si et seulement si pour tout vecteur x de H, l'application L (.) x de Ω dans H est faiblement mesurable.

Nota :

Lorsque l'espace H est séparable, le théorème 1 s'étend au cas de la mesurabilité de Ω dans $L + \{\infty\}$. Il suffit d'observer que :

$$D = \{\omega ; || L(\omega) || < \infty\} = \bigcup_N \{\omega ; || L(\omega) || \leqslant N\}$$

est mesurable d'après le théorème 4.

Théorème 1-2-2

Une condition nécessaire et suffisante pour que L (.) soit une application mesurable est que $\forall$ i,j, $L_{i,j}(.)$ soit mesurable.

Démonstration :

$L_{i,j}(\omega) = < Le_j, e_i >$ est une application de Ω dans $\mathbb{C}$. Cette application est la composée des deux applications mesurables suivantes :

A ω, nous associons L (ω) qui est mesurable par hypothèse.

A L, nous associons $< L\, e_j, e_i >$ qui est mesurable par le théorème 1-2-1 antérieur. Nous savons, par ailleurs, que la composée de deux applications mesurables est mesurable.

Réciproquement :

L'intersection avec L des cylindres à base mesurable de $\prod_{i,j} \mathbb{C}_{i,j}$ constitue une semi-algèbre S engendrant la σ-algèbre de Boole B (théorème 1-3). Un ensemble de S est de la forme $\prod_{i,j} A_{i,j}$ où pour $(i, j) \in K$, ensemble fini d'indices, $A_{i,j}$ est mesurable de $\mathbb{C}_{i,j}$ et pour $(i, j) \notin K$, $A_{i,j} = \mathbb{C}_{i,j}$. Par conséquent:

$$L^{-1}\{\prod A_{i,j} \cap L\} = \prod_{(i,j) \in K} \{\omega ;\ L_{i,j}(\omega) \in A_{i,j}\}$$

Or, l'intersection est finie et chaque ensemble appartient à $\mathcal{A}$ puisque chaque $L_{i,j}(\omega)$ est mesurable. Comme les ensembles de la forme $\{L;\ L \in L,\ L_{i,j} \in A_{i,j}\}$ engendrent B et que leurs images réciproques par $L(\omega)$ sont des ensembles de $\mathcal{A}$, la fonction $L: \omega \to L(\omega)$ est mesurable.■

Théorème 1-2-3

Si H est séparable et si L est mesurable alors pour tout x, $||L\,x||$ est mesurable.

Démonstration :

Par définition $||L\,x|| = \sqrt{< L\,x,\ L\,x >}$ et nous savons que $||L\,x|| = \sup_{||y||=1} |< L\,x,\ y >|$ d'après le théorème 0-2-1. La sphère $S = \{x,\ ||x|| = 1\}$ est séparable. Soit $\{x_m\}$ une suite dense dans S. Pour tout ω, l'opérateur $L(\omega)$ est bornée et et par conséquent :

$$||Lx|| = \sup_{||y||=1} |< Lx,\ y >| = \sup_{m} |< Lx,\ x_m >|$$

Ainsi $||L\,x||$ borne supérieure d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.■

Théorème 1-2-4

Si H est séparable et si L est mesurable alors $||L||$ est mesurable.

Démonstration :

Par définition $|| L || = \sup_{|| x || = 1} || L x ||$. Or, comme dans le théorème antérieur, choisissons $\{x_m\}$ une suite dense dans S. Comme L est borné, la borne supérieure sur x, est égale à la borne supérieure sur x_m c'est-à-dire :

$$|| L || = \sup_{|| x || = 1} || Lx || = \sup_{m} || Lx_m ||$$

La norme de L est mesurable comme borne supérieure d'une suite de fonctions mesurables.■

Proposition 1-2-5

Soit $L_n(.)$ une suite bornée de fonctions mesurables de Ω dans L. Si $L(.)$ est la limite faible pour tout ω de la suite $L_n(.)$, alors $L(.)$ est mesurable de Ω dans L.

Démonstration :

Pour tout couple $x, y \in H$, l'application $\omega \to < L(\omega) x, y > = \lim_n < L_n(\omega) x, y >$ est mesurable. Nous utilisons alors le théorème 1-2-1.

Ce résultat s'applique même si la suite n'est pas bornée dans le cas où H est séparable pour la mesurabilité dans $L + \{\infty\}$.

Proposition 1-2-6

Soient $L(\omega)$ une application de Ω dans L et $\{\Omega_n\}$ une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ tendant vers Ω. La fonction $L(\omega)$ est mesurable si et seulement si pour tout n, $1_{\Omega_n}(\omega) L(\omega)$ est mesurable.

Démonstration :

La fonction indicatrice $1_{\Omega_n}(\omega)$ est mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, par suite le produit $1_{\Omega_n}(\omega) L(\omega)$ est mesurable de Ω dans L si $L(\omega)$ est mesurable.

Réciproquement :

$L(\omega)$ est pour tout ω, la limite uniforme de la suite $1_{\Omega_n}(\omega) L(\omega)$ bornée. D'après la proposition 5, si pour chaque n, $1_{\Omega_n}(\omega) L(\omega)$ est mesurable alors $L(\omega)$ est mesurable.■

Proposition 1-2-7

Soit A un opérateur fixé de L et L (.) une application mesurable de Ω dans L. Dans ces conditions, l'application A L (.) de Ω dans L est mesurable.

Démonstration :

Pour tout couple x, y ϵ H, nous avons $< A\ L\ (\omega)\ x,\ y > = < L\ (\omega)\ x,\ A^{*} y >$ où A^{*} est l'adjoint dans L de A. Par suite l'application qui, à x, y associe $< A\ L\ (\omega)\ x,\ y >$ est mesurable de Ω dans $\mathbb{C}$ et la fonction A L (.) de Ω dans L est mesurable d'après le théorème 1.■

Proposition 1-2-8

Soient L_1 (.) et L_2 (.) deux fonctions mesurables de Ω dans L alors $(L_1 + L_2)$ (.) est mesurable.

Proposition 1-2-9

Si H est séparable et si L (.) et M (.) sont deux applications mesurables de Ω dans L alors L (.) M (.) est une application mesurable de Ω dans L.

Démonstration :

Considérons une base $\{e_n\}$ de H. Pour tout couple x, y de H, nous avons :

$$< L\ (\omega)\ M\ (\omega)\ x,\ y > = \sum_{n} < M\ (\omega)\ x,\ e_n > \ < L\ (\omega)\ e_n,\ y >$$

Par suite l'application $\omega \to < L\ (\omega)\ M\ (\omega)\ x,\ y >$ est mesurable et nous utilisons de nouveau le théorème 1.■

Proposition 1-2-10

Si H est séparable, tout sous-ensemble de L fermé et séparable pour la topologie T_4, est B - mesurable.

Démonstration :

Soit B un ensemble séparable et fermé de L_4. Il existe par définition une suite $\{L_m\}$ dense dans B c'est-à-dire tel que $\overline{\{L_m\}}_4 = B$. Considérons l'ensemble B' égale à $\bigcap_{p} \bigcup_{m} \{L;\ ||L - L_m|| \leqslant \frac{1}{p}\}$. Pour tout L de B et tout p > 0, il existe L_m de la suite $\{L_m\}$ tel que $||L - L_m|| \leqslant \frac{1}{p}$ et L ϵ B'. Réciproquement si L appartient à B', alors L appartient à l'adhérence de la suite L_m puisque quel que soit $\epsilon > 0$, il existe p et L_m tel que $\frac{1}{p} < \epsilon$ et $||L - L_m|| \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \epsilon$. L'ensemble B = B' est élément de B comme intersection dénombrable d'une union dénombrable de sphères, éléments de B.■

Corollaire :

Si H est séparable l'ensemble des opérateurs compacts est B - mesurable.

Démonstration :

L'ensemble des matrices finies est séparable et est isomorphe à l'ensemble des opérateurs de rang fini qui, d'après [38] page 183, est dense dans l'ensemble des opérateurs compacts.■

Théorème 1-2-11

Si H est séparable les ensembles d'opérateurs symétriques, normaux et de projection, sont B - mesurables.

Démonstration :

Considérons l'application qui, à L, associe L^* : Pour tout couple x, y l'application $L \to < L^* x, y > = < x, L y > = \overline{< L x, y >}$ est mesurable de L dans $\mathbb{C}$.

Par suite l'application $L \to L^*$ est mesurable de L dans L. Il en est de même, grace aux théorèmes 2, 8 et 9 des applications qui, à L, associe $L - L^*, L^* L, L L^* - L^* L, L - L^*, L^2 - L$. Par suite, les images réciproques de l'ensemble $\{0\} \in B$ par ces applications sont dans B. En particulier $\{L;\ L L^* - L^* L = 0\}$, ensemble des opérateurs normaux, $\{L;\ L^* - L = 0\}$, ensemble des opérateurs symétriques, $\{L;\ L - L^2 = 0\}$, ensemble des projections.■

Corollaire :

L'application $L \to L^*$ est mesurable de L dans L.

Proposition 1-2-12

Si H est séparable, toute limite forte de polynomes en L, est une fonction de L dans L mesurable pour les σ-algèbres B.

Démonstration :

Identifions dans les théorèmes antérieurs les ensembles Ω et L ainsi que les σ-algèbres $\mathcal{A}$ et B. Par suite tout polynome $P_n(L) = a_0 I + a_1 L + \ldots + a_n L^n$ est mesurable de L dans L. De plus la limite forte et par suite faible de $P_n(L)$ vers $f(L)$ est mesurable de L dans L. ■

Proposition 1-2-13

L'application qui, à L, associe quand la limite est définie $T(L) \overset{\text{déf}}{=} \sum_n < L e_n, e_n >$ où $\{e_n\}$ est une base de H séparable est mesurable de L dans $\mathbb{C}$.

Démonstration :

T (L) est limite dans $\mathbb{C}$ d'une suite de fonctions mesurables.■

Corollaire :

L'application qui, à P, projecteur de L associe dimension de P (H) est mesurable de L dans $\mathbb{N}$.

Démonstration :

L'ensemble des projections appartient à B et d'après [8] page 96 th. 5 la trace T (P) est égale à la dimension de P (H).■

Proposition 1-2-14

Si H est séparable, l'ensemble des opérateurs L de L à image dense dans H appartient à B.

Démonstration :

Considérons l'ensemble :

$B = \bigcap_n \bigcup_l \bigcup_m \{L;\ \| L x_m - x_l \| \leqslant \frac{1}{n}\}$ où $\{x_m\}$ est une suite dense dans H. Cet ensemble est union et intersection dénombrable de sphères et par suite appartient à B. Si L est à image dense dans H alors pour tout x_l et pour tout n, il existe y tel que $\| L y - x_l \| \leqslant \frac{1}{2n}$. Par ailleurs, la suite $\{x_m\}$ est dense dans H et L ϵ L donc il existe x_m tel que $\| Ly - Lx_m \| \leqslant \frac{1}{2n}$. Regroupons les deux inégalités :

$$\| L x_m - x_l \| \leqslant \| L x_m - L y \| + \| L y - x_l \| \leqslant \frac{1}{n}$$

Par suite L appartient à B. Réciproquement supposons que L appartienne à B. Considérons un vecteur x quelconque. Montrons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un vecteur disons x_m tel que $\| L x_m - x \| \leqslant \epsilon$. En effet soit en premier lieu un vecteur x_l de la suite dense, tel que $\| x - x_l \| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Pour n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ et pour x_l, il existe un vecteur x_m tel que $\| L x_m - x_l \| \leqslant \frac{1}{n}$ puisque L ϵ B. Regroupons les inégalités $\| L x_m - x \|$ $\leqslant \| L x_m - x_l \| + \| x_l - x \| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \epsilon$.■

Théorème 1-2-15

Si H est séparable, l'ensemble des opérateurs inversibles appartient à B.

La démonstration nécessite deux lemmes.

Lemme 1

L'ensemble :

$$\mathcal{B} = \{L\ ;\ L \in L \quad \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Lx\|} < \infty\} \text{ appartient à } B.$$

Démonstration :

L'ensemble B est la réunion dénombrable $B = \bigcup_N \{L;\ L \in L \quad \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Lx\|} \leqslant N\}$.

Par ailleurs, l'espace H est séparable et pour tout L fixé, $\|L\| < \infty$. Par suite si $\{x_m\}$ est une suite dense dans H, nous avons :

$$\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Lx\|} = \sup_m \frac{\|x_m\|}{\|Lx_m\|}$$

puisque pour tout vecteur x, il existe une sous suite $\{x_p\}$ tendant vers x et par conséquent :

$$\|x_p\| \to \|x\|,\ \|Lx_p\| \to \|Lx\| \text{ et enfin } \frac{\|x_p\|}{\|Lx_p\|} \to \frac{\|x\|}{\|Lx\|}$$

Remarquons que si pour un vecteur $x \neq 0$, nous avons $Lx = 0$, nous définissons $\frac{\|x\|}{\|Lx\|} = \infty$:

Pour tout vecteur x non nul fixé, l'application :

$L \to \frac{\|x\|}{\|Lx\|}$ de L dans $\mathbb{R}^+$ est mesurable comme inverse d'une fonction mesurable et puisque l'ensemble $\{L;\ \|Lx\| = 0\}$ est mesurable de L dans $\mathbb{R}$. Chaque ensemble $\{L;\ L \in L, \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Lx\|} \leqslant \mathbb{N}\}$ appartient à B.■

Lemme II

Le sous–ensemble de B des opérateurs injectifs appartient à B.

Démonstration :

Considérons l'ensemble

$A = \{L;\ L \in \mathcal{L}\ \exists\ x\ \|x\| = 1\quad x \in H \text{ et } Lx = 0\}$ des opérateurs non injectifs. Or tout opérateur L de $\mathcal{L}$ est borné $\|L\| < \infty$ et l'espace H est séparable. Soit $\{x_m\}$ une suite dense dans $\{x;\ \|x\| = 1\}$. Démontrons que $A \subset A' \overset{\text{def}}{=} \bigcap_n \bigcup_m \{L;\ L \in \mathcal{L}\ \|Lx_m\| < \frac{1}{n}\}$. En effet si $L \in A$ alors, il existe x de norme 1 et tel que $Lx = 0$. Pour la sous-suite $\{x_p\}$ qui tend vers x, nous avons $Lx_p \to Lx$. Pour tout n, il existe un p tel que $\|Lx_p - Lx\| = \|Lx_p\| \leqslant \frac{1}{n}$ et par conséquent $A \subset A'$.

Réciproquement :

Considérons la sous-suite $\{x_{m(n)}\}$ de vecteurs de H tel que: $\|Lx_{m(n)}\| \leqslant \frac{1}{n}$. Cette ensemble n'est pas nécessairement borné. Supposons que $L \in A' \cap B$. D'après le lemme précédent, il existe pour tout L fixé de B, un entier N tel que $\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Lx\|} \leqslant N$.

Cette inégalité implique que la suite $\{x_{m(n)}\}$ est de Cauchy.

Il existe un vecteur limite x de la suite $\{x_{m(n)}\}$ tel que $\|x\| = \lim_n \|x_{m(n)}\| = 1$ et tel que $\|Lx\| = \lim_n \|Lx_{m(n)}\| = 0$. Par conséquent $A \cap B = A' \cap B$ appartient à B.■

Démontrons maintenant le théorème :

Pour qu'un opérateur L soit inversible, il faut et il suffit que L soit injectif, que l'image de H par L soit dense et enfin que L^{-1} soit de norme fini. L'ensemble des opérateurs injectifs et tel que L^{-1} soit de norme finie est précisément le sous-ensemble $A \cap B$ qui est B-mesurable. L'intersection de cet ensemble $A \cap B$ avec l'ensemble, B-mesurable d'après la proposition 1-2-14, des opérateurs à image dense, est B-mesurable.■

Théorème 1-2-16

Si H est séparable, l'application qui, à L p.s. normal associe L^{-1} de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L} + \{\infty\}$ est B-mesurable.

Démonstration :

Cette fonction est définie sur l'ensemble des opérateurs inversibles qui, d'après le résultat antérieur, appartient à B.

Soit $I_{N,\,M} = \{L;\ L \text{ inversible},\ \| L \| \leqslant N,\ \| L^{-1} \| \leqslant M\}$

Par suite, l'ensemble des opérateurs inversibles est l'union des I_{NM}.

Considérons une suite de polynomes $P_k(x)$ qui tend uniformément vers $\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $[-N, -\frac{1}{M}] \cup [+\frac{1}{M}, N]$. Pour tout $L \in I_{N,\,M}$, nous avons $P_k(L) \underset{T_2}{\to} L^{-1}$. D'après la proposition 1-2-5, la restriction au sous ensemble $I_{N,\,M}$ de l'application $L \to L^{-1}$, est mesurable. Comme la restriction de l'application $L \to L^{-1}$ à chaque $I_{N,\,M}$ est mesurable, d'après la proposition 1-2-6, l'application $L \to L^{-1}$ est mesurable de L dans L.■

Proposition 1-2-17

Si H est séparable, l'ensemble des opérateurs unitaires est B mesurable.

Démonstration :

Par les théorèmes antérieurs 1-2-8, 11, 16, les applications qui, à L normal, associe, L^{-1}, L^*, $L^{-1} - L^*$ sont mesurables. L'ensemble $\{L;\ L^{-1} - L^* = 0\}$ appartient donc à B et c'est précisément l'ensemble des opérateurs unitaires.■

1-3 - Variables aléatoires à valeurs dans L

Définition 1-3-1

Une variable aléatoire étagée (simple) à valeurs des opérateurs linéaires bornés (V.A.O.L. étagée - simple) est une application $L(.)$: $\omega \longrightarrow L(\omega)$ de Ω dans L de la forme :

$$L(\omega) = L_i \text{ si } \omega \in A_i \text{ où } \forall i \in [1, \ldots n]\ \ A_i \in \mathcal{A},\ \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Dans le cas étagé $n \in \mathbb{N}$ et dans le cas simple $n = \infty$. Si $i \neq j$, $L_i \Rightarrow L_j$, l'écriture de $L(\omega)$ est dite canonique.

Proposition 1-3-1

Pour qu'une application L de Ω dans L soit une V.A.O.L. étagée, il faut et il suffit que $L^{-1}(B)$ soit une sous σ-algèbre finie de $\mathcal{A}$.

Proposition 1-3-2

L'ensemble E des V.A.O.L. étagées sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ est doté d'une structure d'algèbre qui prolonge la structure d'algèbre de L.

1°) E est un espace vectoriel: $L \in E$ et $M \in E$ avec $L = \sum_i 1_{A_i} L_i$ $M = \sum_j 1_{B_j} M_j$.

$$L + M = \sum_{i,j} (L_i + M_j)\ 1_{A_i \cap B_j}$$

$$\lambda L = \sum_i \lambda\ L_i\ 1_{A_i}$$

2°) E est une algèbre (non commutative): $L \in E$ $M \in E$,

$$L\,M = \sum_{i,j} L_i\ M_j \qquad 1_{A_i \cap B_j}$$

Définition 1-3-2

Une variable aléatoire à valeurs dans L muni de la topologie T, et que nous noterons V.A.O.L.T., est une application de Ω dans L muni de la topologie T qui soit la limite en chaque point ω de Ω d'une suite d'opérateurs aléatoires linéaires bornées simples.

Toutes les limites sont prises par rapport à une seule topologie fixée T de L. Les seules topologies que nous considérerons dans ce paragraphe sont les topologies faibles, fortes ou uniformes ainsi que les topologies affaiblies de celles-ci.

Théorème 1-3-3

Pour qu'un opérateur L linéaire de Ω dans L soit une V.A.O.L.T., il faut qu'il soit mesurable relativement à $\mathfrak{A}$ et à la σ-algèbre B et que l'image de Ω soit séparable.

Démonstration:

Puisque L est une V.A.O.L.T., c'est une limite ponctuelle dans L d'une suite de V.A.O.L. simples L_n. Pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons :

$$| < (L_n - L)\,x, y > | \leqslant || (L_n - L)\,x || \ || y || \leqslant || L_n - L || \ || x_i || \ || x_j ||$$

$$\forall\, x, y \in H$$

et par conséquent pour chacune des trois topologies

$$< L_n\, x_i, y_j, > \ \rightarrow\ < Lx, y >.$$

Les produits scalaires $< L_n\, x,\, y >$ sont des variables complexes aléatoires simples. Par conséquent $< Lx,\, y >$ limite dans $\mathbb{C}$ de fonctions mesurables est mesurable.

Comme $L_n(\omega) \xrightarrow[T]{} L(\omega)$ et que le nombre de valeurs distinctes de L_n est dénombrable l'ensemble $L(\Omega)$ est séparable pour la topologie T.■

Théorème 1-3-4

Si H est séparable et si $L(\omega)$ est une fonction mesurable de Ω dans L, muni de la topologie forte, alors $L(\omega)$ est une V.A.O.L.T.$_2$.

Démonstration :

Considérons d'abord le sous-ensemble S_N^* des opérateurs $L \in L$ de norme $\| L \| \leqslant N$.

Comme $\| L(\omega) \|$ est mesurable d'après le théorème 1-2-4, le sous-ensemble Ω_N de Ω défini par $\Omega_N = L^{-1}(S_N^*)$, est un ensemble de $\mathfrak{A}$. L'espace L_2 est séparable et soient dans S_N^*, une suite $L_1, L_2 \ldots L_p, \ldots$ dense et $x_1, x_2 \ldots x_m \ldots$ une suite dense dans $\partial S = \{x;\ \| x \| = 1\}$. Fixons nous n et considérons $x_1, x_2 \ldots x_n$ ainsi que les voisinages dépendant de ω, définis par :

$$V(L(\omega)) = \{L\ ;\ \forall m,\ m = 1 \ldots n\ \ \| (L - L(\omega))\ x_m \| < \frac{1}{n}\}$$

Déterminons grace à ses voisinages, une sous-suite $L_q^{(n)}$ de la suite dense L_p de façon que, pour tout ω il existe un opérateur linéaire $L_q^{(n)}$, dans $V(L(\omega))$. Réciproquement si nous considérons tous les voisinages :

$$V(L_q^{(n)}) = \{L;\ \forall m,\ m = 1 \ldots n\ \ \| (L - L_q^{(n)})\ x_m \| < \frac{1}{n}\}$$

ils forment un recouvrement ouvert de Ω_N.

Nous noterons $A_{n,q}$ leur image réciproque par $L(\omega)$ et nous construisons la suite $A'_{n,q}$ disjointe :

$$A'_{n,q} \overset{\text{def}}{=} A_{n,q} - \bigcup_{k=1}^{q-1} A_{n,k}$$

Ainsi la famille dénombrable $A'_{n,q}$ de sous-ensembles mesurables de Ω_N forme une partition de Ω_N :

$$\sum_q A'_{n,q} = \Omega_N \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Définissons alors la V.A.O.L. étagée L_n (.) de la façon suivante : ${}_*L_n$ (.): $\omega \longrightarrow L_q^{(n)}$ si $\omega \in A'_{n,q}$; c'est une application de Ω_N dans S_N^*.

Montrons finalement que L_n (ω) tend vers L (ω) fortement quand n tend vers l'infini. Soient $\omega \in \Omega_N$, x_m et $\epsilon > 0$ fixés, choisissons Msuffisamment grand pour que $M \geqslant m$ et $M \geqslant \frac{1}{\epsilon}$. Si $n \geqslant M$, il existe q tel que $\omega \in A'_{n,q}$ et $L(\omega) \in V(L_q^{(n)}) = \{L; \forall m, m = 1 \ldots n \;||\; (L - L_q^{(n)})\, x_m \;|| < \frac{1}{n}\}$ et par conséquent $||\; (L((\omega) - L_n(\omega))\;|| < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{M} \leqslant \epsilon$.

Ainsi pour tout x_m de la suite dense dans S, L_n (ω) x_m tend vers L (ω) x_m. D'après le théorème 0-2-3 ceci implique que L_n (ω) tend fortement vers L (ω).

Jusqu'à présent l'espace L est réduit à S_N^* des opérateurs L dont la norme est inférieure à N. Nous passons sans difficulté de la propriété sur S_N^* à la propriété sur L.■

Comparaison avec les mesurabilités affaiblies :

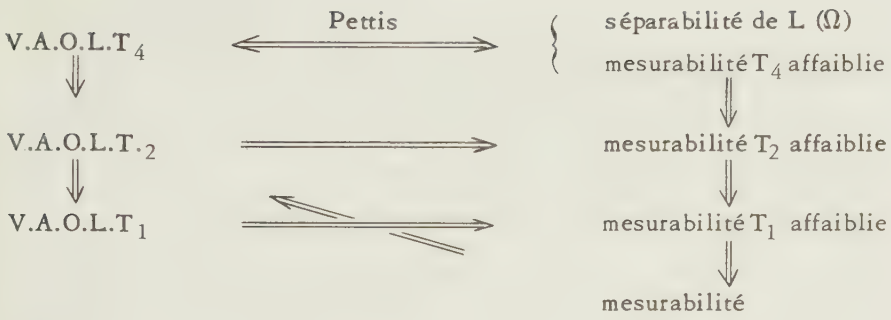
L'espace L muni de la topologie uniforme est un espace de Banach. Par conséquent nous pouvons lui appliquer les résultats relatifs aux espaces de Banach. Considérons $(L_4)'$ son dual topologique. Une fonction L (.) de Ω dans L est dite faiblement mesurable au sens de l'espace L_4 de Banach si pour toute fonctionnelle f continue de L_4 dans $\mathbb{C}$, l'application f (L (ω)) de Ω dans $\mathbb{C}$ est mesurable.

Le théorème de Pettis (cf. [42] page 131) démontre l'identité entre les V.A.O.L. T_4 et les opérateurs linéaires mesurables pour la topologie uniforme affaiblie à image séparable.

De la même façon, nous pouvons partir des topologies faibles et fortes. Mais d'après le paragraphe 0-4, les duals de L_1 et de L_2 soient $(L_1)'$ et $(L_2)'$, sont égaux. Nous avons noté $\tilde{L} = (L_1)' = (L_2)'$.

Si la fonction L (.) est mesurable de Ω dans L alors pour tout x et tout y de H $\langle L(.)\, x, y \rangle$ est mesurable ainsi que toute combinaison linéaire de telles expressions. Par suite L (.) est mesurable de Ω dans L pour la topologie forte affaiblie.

Le théorème de Pettis pour l'espace de Banach L_4 ainsi que le théorème 1-3-4 se résument pour un espace de Hilbert séparable dans le tableau.



Définition d'un O.A.L.

Comme nous nous préoccupons essentiellement des propriétés lorsque H est séparable et que L est muni de la topologie forte sauf avis contraire, une V.A.O.L. est une fonction de Ω dans L mesurable par rapport aux σ-algèbres $\mathcal{A}$ et B Nous parlerons dans ce cas d'opérateur L (ω) mesurable, ou encore d'opérateurs aléatoires linéaires soit par abréviation d'O.A.L.

Dans le cas où H n'est pas séparable, un O.A.L. sera une V.A.O.L.T_2.

Théorème 1-3-5

Si L (.) est un O.A.L. pour tout $x \in H$, la fonction $\| L(.)x \|$ est mesurable.

Démonstration :

Puisque L (.) est un O.A.L. il existe une suite $L_n(.)$ de V.A.O.L. simples convergeant fortement vers L (.), Par suite, pour tout x de H, nous avons $\| L(.)x \| = \lim_{n \to \infty} \| L_n(.)\ x \|$ qui est donc mesurable.■

1-4 - Intégrabilité faible

Introduction :

Dans ce paragraphe comme dans le suivant nous considérerons uniquement des fonctions L (.) mesurable de Ω dans L. Si $L(\omega)$ est définie sur un sous-ensemble Ω' mesurable de Ω alors nous réduirons l'espace Ω à son sous-ensemble Ω'. Si L est muni de la topologie uniforme L_4 est un espace de Banach et il est possible d'effectuer deux théories de l'intégration. Soit l'intégrale de L (ω) est l'intégrale de Bochner de L (ω), soit on considère toutes les fonctionnelles f de $(L_4)'$ dual topologique de L_4 ainsi que $\int_\Omega f(L(\omega))\, d\,P(\omega)$. Ces deux notions d'intégrale diffèrent (cf [28] page 8).

L'objet de ce paragraphe est de définir une notion d'intégrale lorsque les fonctionnelles f appartiennent à $\widetilde{L} = (L_d)' = (L_f)' \subset (L_u)'$.

Nous supposerons en premier lieu que pour tout fonctionnelle f de $\widetilde{L}$, la fonction mesurable f (L (ω))de Ω dans $\mathbb{C}$, est intégrable, c'est à dire :

$$\forall f \in \widetilde{L} \quad \left| \int_\Omega f\,(L\,(\omega))\, d\,P\,(\omega) \right| < \infty$$

Nous avons remarqué (chapitre 0 § 4) que toute fonctionnelle $f \in \widetilde{L}$ est de la forme $f = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k, y_k}$.

Il est alors clair que pour tout $f \in \widetilde{L}$, f (L (ω)) est intégrable si et seulement si pour tout vecteur x de H et tout vecteur y de H, $< L(\omega)\, x, y >$ est intégrable.

Considérons alors l'application T qui, à $f \in L$, associe $\int_\Omega f(L(\omega))\, dP(\omega)$ Cette application est définie pour toute fonctionnelle f de $\widetilde{L}$ par hypothèse. Cette application est linéaire.

Nota :

Si pour certaine fonctionnelle f, $\int f\,(L\,(\omega))\, d\,P\,(\omega)$ n'est pas définie, l'ensemble des éléments f de $\widetilde{L}$ où $\int_\Omega f\,(L\,(\omega))\, d\,P\,(\omega)$ est définie, est un sous-espace vectoriel de $\widetilde{L}$.

L'espace $\widetilde{L}$ est muni de la topologie de la convergence sur tout borné, (notation $\widetilde{L}_b$) qui correspond à la norme $\| f \| = \sup \frac{|f(L)|}{\| L \|}$.

Supposons de plus que T soit continue de $\widetilde{L}_b$ dans $\mathbb{C}$ Dans ces conditions, comme l'espace L_1 est semi-reflexif d'après le théorème 1-3-5, l'élément T du bidual topologique de L_1 peut être considéré comme un élément de L. Cet élément, par définition, est l'intégrale de L (.). Nous noterons cette intégrale

$$T = D - \int L\, d\,P = D - \int_\Omega L\,(\omega)\, d\,P\,(\omega)$$

Définition 1-4-1

La fonction L (.) mesurable est D-intégrable si l'application qui, à $f \in \widetilde{L}_b$, associe $\int f\,(L)\, d\,P$ est continue.

La valeur de l'intégrale de L (ω) est l'unique élément T de L tel que, pour tout f de $\widetilde{L}$, $T\,(f) = \int_\Omega f\,(L\,(\omega))\, d\,P\,(\omega)$; c'est aussi l'unique élément T de L tel que, pour tout vecteur x de H et pour tout vecteur y de H.

$$< Tx, y > = \int_\Omega < L\,(\omega)\, x, y > d\,P\,(\omega)$$

Théorème 1-4-1

Pour qu'une fonction L (.) mesurable soit D-intégrable il faut et il suffit qu'il existe une constante K telle que, pour tout x et tout y de H:

$$\left| \int_\Omega < L(\omega) x, y > d P(\omega) \right| \leqslant K \, || x || \, || y ||$$

Démonstration :

Si L (ω) est intégrable alors pour toute fonctionnelle f, nous $|T(f)| < || T || \, || f ||$. En particulier pour les fonctionnelles $f_{x,y}$:

$$\left| \int_\Omega < L x, y > d P \right| \leqslant || T || \, || x || \, || y ||$$

puisque

$$|| f_{x,y} || = \sup \frac{| < L x, y > |}{|| L ||} \leqslant || x || \, || y ||$$

Réciproquement :

Si pour tout vecteur x et tout vecteur y, $\left| \int_\Omega < L(\omega) x, y > d P(\omega) \right| \leqslant K \, || x || \, || y ||$ alors pour tout f de $\tilde{L}$, $\int_\Omega f (L(\omega) d P(\omega)$ existe. L'application T qui, à f, associe $\int_\Omega f (L(\omega)) d P(\omega)$ est linéaire.

Or $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{x_i, y_i}$ où les deux systèmes $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ sont orthogonaux et les λ_i sont positifs ou nuls avec $|| f || = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (voir [8] page 39), nous avons :

$$\left| \int f (L(\omega)) d P(\omega) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, K \, || x_i || \, || y_i ||$$

$$= K \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = K \, || f || \, \blacksquare$$

Proposition 1-4-2

Si L (ω) est D-intégrable alors pour tout vecteur x de H, le vecteur aléatoire L (ω) x est intégrable Pettis.

Démonstration :

Pour tout vecteur y de H, nous avons :

$$\left| \int_\Omega < L(\omega) x, y > d P(\omega) \right| \leqslant K \, \| x \| \, \| y \|$$

Par suite l'application qui, à y de H, associe $\int_\Omega < L(\omega) x, y > d P(\omega)$ (ω) est linéaire continue. Il existe un vecteur unique z de H tel que pour tout y de H :

$$< z, y > = \int_\Omega < L(\omega) x, y > d P(\omega)$$

Le vecteur z est précisément l'intégrale Pettis de $L(\omega) x$ et se note, $z = \int_\Omega L(\omega) x \, d P(\omega)$.■

Définition 1-4-2

Un O.A.L. $L(.)$ est dit T_4-intégrable si $\| L(\omega) \|$ est mesurable et intégrable.

Proposition 1-4-3

Si $L(\omega)$ est T_4-intégrable alors $L(\omega)$ est D-intégrable.

1-5 - Espérance mathématique d'un Opérateur Aléatoire Linéaire

Soit $L(\omega)$ une V.A.O.L. étagée. Il existe une partition finie $\{S_i\}$ de Ω par des ensembles mesurables S_i telle que $L(\omega) = L_i$ pour $\omega \in S_i$.

Définition 1-5-1

L'espérance mathématique de la V.A.O.L. étagée $L(.)$ vaut $E(L(\omega)) = \sum_i L_i \, P(S_i)$. Cette espérance se note $E(L(\omega)) = \int_\Omega L(\omega) \, d P(\omega)$ $= \int_\Omega L \, d P$.

La définition est indépendante des propriétés topologiques de L.

L'espérance mathématique $E(.)$ associe à toute V.A.O.L. étagée un opérateur de L. Cette fonction est linéaire. Soit T un opérateur linéaire de L dans L; ainsi $T(L(\omega))$ est une V.A.O.L. étagée et :

$$E(T(L(\omega))) = \sum_i P(S_i) \, T(L_i) = T(\sum_i P(S_i) \, L_i) = T(E(L(\omega)))$$

Proposition 1-5-1

Pour tout vecteur x et tout vecteur y de H ainsi que pour toute V.A.O.L. étagée.

$$E(L(\omega)x) = E(L(\omega))x$$
$$E(<L(\omega)x, y>) = <E(L(\omega))x, y>$$

Nous en déduisons les inégalités suivantes :

Corollaire :

$$|<E(L(\omega))x, y>| \leqslant E(|<L(\omega)x, y>|)$$
$$||E(L(\omega))x|| \leqslant E(||L(\omega)x||)$$
$$||E(L(\omega))|| \leqslant E(||L(\omega)||)$$

Espace $\mathbb{L}_{1,f}$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et considérons le sous-espace des O.A.L. de Ω dans L telles que pour tout vecteur x de H. la norme de $L(\omega)x$ soit intégrale : $\mathbb{L}_{1,f} = \{L(.); \forall x \int_\Omega ||L(\omega)x|| dP < \infty\}$ (Voir théorème 3-5)

Remarquons que $\forall x \in H$ le vecteur $L(.)x$ aléatoire est Bochner intégrable (cf [42] page 132) c'est un espace vectoriel que l'on munit de la topologie induite par les semi-normes $p_x(L) = \int_\Omega ||L(\omega)x|| dP(\omega)$. Ainsi une suite $L_k(.)$ d'éléments de $\mathbb{L}_{1,f}$ tend vers $L(.)$ si pour tout vecteur x nous avons :

$$\lim_k \int_\Omega ||(L_k(\omega) - L(\omega))x|| dP = 0$$

La notion de convergence ainsi introduite s'appelle la convergence forte en moyenne d'ordre 1.

Proposition 1-5-2

Si H est séparable. Le sous-ensemble des fonctions mesurables T_4-intégrable ou de norme intégrale est un sous-espace vectoriel dense dans $\mathbb{L}_{1,f}$.

Démonstration :

Pour tout vecteur x et pour tout ω, $||L(\omega)x|| \leqslant ||L(\omega)|| \, ||x||$ et si $||L.(\omega)||$ est intégrable, il en est de même de $||L(\omega)x||$. Il est clair que le sous-ensemble est un espace vectoriel. Démontrons qu'il est dense dans $\mathbb{L}_{1,f}$. Soit $L(\omega)$ un élément quelconque de $\mathbb{L}_{1,f}$. Introduisons $\Omega_N = \{\omega; ||L(\omega)|| \leqslant N\}$ qui appartient à $\mathcal{A}$ (théorème 2-4).

La fonction $1_{\Omega_N}(\omega)\, L(\omega)$ mesurable de Ω dans L, est de norme intégrable.

De plus, $\forall\, \omega \in \Omega, \forall\, x \in H \quad \| (L(\omega) - 1_{\Omega_N}(\omega)\, L(\omega))\, x \|$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini et $\| (L(\omega) - 1_{\Omega_N}(\omega)\, L(\omega))\, x \| \leqslant 2 \| L(\omega)\, x \|$ qui est une fonction intégrable fixe. Nous terminons en utilisant le théorème de Lebesgue de convergence dominée pour la suite :

$$\int_\Omega \| (L(\omega) - 1_{\Omega_N} L(\omega))\, x \|\, dP(\omega) \blacksquare$$

Corollaire :

$1_{\Omega_N}(\omega)\, L(\omega)$ tend vers $L(\omega)$ fortement en moyenne d'ordre 1.

Théorème 1-5-3

Le sous-espace des V.A.O.L. étagées, est un sous-espace vectoriel dense dans l'espace $\mathbb{L}_{1,f}$.

Démonstration :

Comme L (.) est un O.A.L., il existe une suite $L_n(.)$ de V.A.O.L. étagées qui converge fortement simplement vers L (.). Par suite, utilisant les notations du théorème antérieur :

$$\forall\, \omega \in \Omega \qquad 1_{\Omega_N} L_n(\omega) \underset{f}{\to} 1_{\Omega_N} L(\omega)$$

De cette façon :

$$\forall\, x \in H \qquad \| (1_{\Omega_N} L_n(\omega) - 1_{\Omega_N} L(\omega)\, x \| \leqslant 2N \| x \|$$

Et par le théorème de LEBESGUE de convergence dominée

$$\forall\, x \in H \qquad \int \| (1_{\Omega_N} L_n(\omega) - 1_{\Omega_N} L(\omega)\, x \|\, dP(\omega) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

L'ensemble des V.A.O.L. étagées est dense dans l'ensemble $\{L(.);\ \forall\, \omega \ \| L(\omega) \| \leqslant N\}$ ce qui suffit à démontrer le théorème.■

Nous venons de voir que les V.A.O.L. étagées constituent un sous-espace vectoriel dense dans l'espace $\mathbb{L}_{1,f}$. Or pour toute V.A.O.L. étagée de Ω dans L, nous avons défini une espérance mathématique. Le problème consiste à étendre autant qu'il est possible cette espérance mathématique des V.A.O.L. étagées aux opérateurs de $\mathbb{L}_{1,f}$.

Si H est séparable, d'après le corollaire du théorème 0-3-7. L'espace L est quasi-complet. Rappelons la proposition 8 [5] chapitre 3 § 2 : Soient E un espace vectoriel topologique, M un sous-espace vectoriel de E tel que tout point de E soit adhérent à une partie bornée de M. Alors toute application linéaire continue f de M dans un espace vectoriel topologique F séparé et quasi-complet se prolonge d'une seule manière en une application linéaire continue de E dans F.

Appelons M le sous-espace vectoriel des V.A.O.L. étagées et considérons l'application qui, à $L(.) \in M$, associe $E(L(\omega))$. Cette application est linéaire continue de M muni de la topologie induite par $\mathbb{L}_{1,f}$ dans L_2 puisque $\| \int_\Omega L(\omega)\, x\, d\, P \| \leqslant \int_\Omega \| L(\omega)\, x \|\, dP(\omega)\, \forall x \in H$.

Soit E (.) l'extension de la fonction antérieure.

Définition 1-5-2

Un O.A.L. $L(\omega)$ de $\mathbb{L}_{1,f}$ est intégrable si elle appartient au domaine de définition de E (.). Son espérance mathématique est alors $E(L(\omega))$.

Le domaine de définition de $\underline{E(.)}$ est l'union des adhérences de tous les bornés de M soit $\bigcup_{\substack{B \text{ borné de} \\ \mathbb{L}_{1,f}}} \underline{(B \cap M)}$

Théorème 1-5-4

Un O.A.L. L (.) de Ω dans L est intégrable si et seulement si :

$$\forall x \in H \qquad \int_\Omega \| L(\omega)\, x \|\, d\, P\, (\omega) < \infty$$

Démonstration :

Si $L(\omega)$ est intégrable alors :

$$L(\omega) \in \bigcup_{B \text{ borné}} (B \cap M) \subset \mathbb{L}_{1,f}$$

Réciproque :

Introduisons l'espace vectorielle :

$$M' = \bigcup_N \{ L(.) ; \forall \omega \quad \| L(\omega) \| \leqslant N \}$$

L'espace M' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}_{1,f}$ tel que, tout point de M', soit adhérent à une partie bornée de M. L'application linéaire continue E (.) s'étend de M à M'.

Maintenant considérons un élément L (.) quelconque de $\mathbb{L}_{1,f}$. Introduisons la suite $L_N(\omega) = 1_{\Omega_N}(\omega)\, L(\omega)$ où $\Omega_N = \{\omega;\ ||\, L(\omega)\,|| \leqslant N\}$ Toutes les V.A.O.L. L_N (.) appartiennent à M'. Elles constituent un ensemble borné dans $\mathbb{L}_{1,f}$ puisque pour tout $x \in H$, $\int_\Omega ||\, L_N(\omega)\, x\,||\, d\,P(\omega) \leqslant \int_\Omega ||\, L(\omega)\, x\,||\, d\,P(\omega) < \infty$.

Finalement $L_N(\omega)$ tend vers $L(\omega)$ dans $\mathbb{L}_{1,f}$ quand N tend vers l'infini. L'application linéaire continue E (.) s'étend de M' à $\mathbb{L}_{1,f}$.■

Remarque :

$E(L(\omega)) = \lim_{N \to \infty} E(L_N(\omega))$. La limite est prise dans L_2. Par suite d'après [42] page 69 corollaire 2

$$||\, E(L(\omega))\,|| \leqslant \lim\ ||\, E(L_N(\omega))\,||$$

Proposition 1-5-5

Pour tout vecteur x de H si $L(\omega)$ est un O.A.L. intégrable, $L(\omega)\, x$ est intégrable Bochner et :

$$E(L(\omega))\, x = \int (L(\omega)\, x)\, d\,P$$

Démonstration :

L'application qui, à L_o de $\mathbb{L}_{1,f}$, associe $E(L_o)$ est continue de $\mathbb{L}_{1,f}$ dans L_2. Par suite pour tout voisinage $\mathbb{W}$ de $E(L_o)$ dans L_2, il existe un voisinage V de L_o dans $\mathbb{L}_{1,f}$ tel que $E(V) \subset \mathbb{W}$. Considérons alors pour tout $n > 0$ et pour $x \in H$ fixé le voisinage :

$$\mathbb{W} = \{T;\ T \in L\ \ ||\, (T - E(L_o))\, x\,|| \leqslant \frac{1}{n}\} \quad \text{ainsi que}$$

$$V' = V \cap \{L(.);\ \int ||\, (L - L_o)\, x\,||\, d\,P \leqslant \frac{1}{n}\} \subset V$$

La famille des V.A.O.L. étagées est dense dans $\mathbb{L}_{1,f}$, d'après le théorème 1-5-3. Par conséquent il existe L_n V.A.O.L. étagée dans V'. Pour cette variable aléatoire, nous avons les propriétés :

$$\int ||\, (L_n - L_o)\, x\,||\, d\,P \leqslant \frac{1}{n}$$

$$||\, (E(L_n) - E(L_o))\, x\,|| \leqslant \frac{1}{n}$$

$$E(L_n)\, x = \int (L_n\, x)\, d\,P \quad \text{(Proposition 0.5.1)}$$

Par conséquent pour tout n, il existe L_n et :

$$|| E(L_o(\omega)) x - \int L_o \, x \, d P || \leqslant$$

$$||[E(L_o(\omega)) - E(L_n(\omega))] x || + || \int (L_n - L_o) \, x \, d P || \leqslant \frac{2}{n}$$

Par suite, nous obtenons le théorème en faisant tendre n vers l'infini.■

Corollaire 1

Pour tout vecteur x de H, si $L(\omega)$ est un O.A.L. intégrable

$$|| E(L(\omega)) x || \leqslant \int || L x || d P$$

Corollaire 2

Pour tout vecteur x et tout vecteur y de H, si $L(\omega)$ est un O.A.L. intégrable, $< L(\omega) x, y >$ est intégrable et :

$$< E(L(\omega)) x, y > = \int < L x, y > d P$$

Corollaire 3

Si $L(\omega)$ est un O.A.L. intégrable et si $M \in L$, $E(M L(\omega)) = M E(L(\omega))$.

Démonstration :

$M L(\omega)$ est intégrable. Pour le vecteur $z(\omega) = L(\omega) x$, nous avons (cf [42] page 134 corollaire 2):

$$\int (M z(\omega)) d P(\omega) = M \int z(\omega) d P(\omega) ■$$

Proposition 1-5-6

Si $L(\omega)$ est un O.A.L. intégrable, elle est D-intégrable et :

$$E(L(\omega)) = D - \int_\Omega L(\omega) d P(\omega)$$

Remarque :

Dans ces conditions, $L(\omega)$ est D-intégrable et les trois intégrables sont égales.

Corollaire :

Si $L(\omega)$ est un O.A.L. T_4-intégrable :

$$|| E(L) || \leqslant \int || L || d P$$

Démonstration :

Pour tout vecteur x de H :

$$\| \int L x \, d P \| \leqslant \int \| L x \| \, d P \leqslant \int \| L \| \, d P \, \| x \| \, \blacksquare$$

Intégrale Indéfinie

Parfois, nous serons intéressé à connaître la valeur de l'intégrale d'un O.A.L. intégrable sur un sous-ensemble A mesurable de l'espace entier Ω. Introduisons la fonction caractéristique $1_A(\omega)$ de l'ensemble A. Comme $L(\omega)$ est mesurable de Ω dans L, il en est de même de $1_A(\omega) L(\omega)$. Comme $L(\omega)$ est intégrable, il en est a fortiori de même de $1_A(\omega) L(\omega)$.

Par définition, son espérance mathématique est l'intégrale sur A de $L(\omega)$ et se note :

$$\int_A L(\omega) \, d P(\omega) = E(1_A(\omega) L(\omega))$$

Proposition 1-5-8

Si H est séparable et si pour deux O.A.L. intégrables $L(\omega)$ et $L'(\omega)$. On a quel que soit $A \in \mathcal{A}$:

$$\int_A L(\omega) \, d P(\omega) = \int_A L'(\omega) \, d P(\omega) \text{ alors } L(\omega) \underset{\text{p. s.}}{=} L(\omega)$$

Démonstration :

En raison de l'additivité de l'espérance mathématique, il suffit de prouver que si :

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A L(\omega) \, d P(\omega) = 0 \text{ alors } L(\omega) \underset{\text{p. s.}}{=} 0$$

Soit $\{x_m, m \geqslant 1\}$ une famille dénombrable dense dans H. Pour tout m

$$\langle \int_A L \, d P \, x_m, x_m \rangle = \int_A \langle L x_m, x_m \rangle \, d P = 0$$

Par conséquent $\langle L x_m, x_m \rangle \underset{\text{p. s.}}{=} 0$. Introduisons N_m négligeable tel que si $\omega \in N_m^c \langle L(\omega) x_m, x_m \rangle = 0$ ainsi que $N = \bigcup_m N_m$. Pour $\omega \in N^c$, $\forall m \langle L(\omega) x_m, x_m \rangle = 0$. Comme $L(\omega) \in L$, $L(\omega)$ est continue et $L(\omega) = 0$.$\blacksquare$

Proposition 1-5-9

L'intégrale indéfinie d'un O.A.L. $L(\omega)$ intégrable, est une fonction de $\mathcal{A}$ dans L fortement σ-additive.

Démonstration :

Soit $\{A_1, A_2, \ldots\}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Définissons A comme la somme $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ et introduisons $1_{B_n}(\omega)$ où $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$

Observons, en premier lieu, que $1_{B_n}(\omega)$ converge presque-sûrement vers $1_A(\omega)$. La suite de fonctions $1_{B_n}(\omega)\, L(\omega)$ converge dans $\mathbb{L}_{1,f}$ vers $1_A(\omega)\, L(\omega)$ puisque :

$$\forall x \in H \qquad \int_A \| (1_{B_n}(\omega)\, L(\omega) - L(\omega))\, x \|\, d\, P(\omega) = \int_{A - B_n} \| L(\omega)\, x \|\, d\, P(\omega)$$

qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par suite :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} L(\omega)\, d\, P(\omega) = \int_{\sum_{k=1}^{n} A_k} L(\omega)\, d\, P(\omega) = E(1_{B_n} L)$$

tend vers $E(1_A L) = \int_{\sum_{1}^{\infty} A_k} L(\omega)\, d\, P(\omega)$ dans L_2 d'après la continuité de $E(.)$ de $\mathbb{L}_{1,f}$ dans L_2.■

Définition 1-5-3

Une mesure μ de $\mathcal{A}$ dans L_1 est dite T_1 -absolument continue par rapport à P si pour tout x et pour tout y de H, quelquesoit $\epsilon > 0$, il existe η tel que $P(A) < \eta$ pour $A \in \mathcal{A}$ implique $| < \mu(A)\, x, y > | < \epsilon$.

Proposition 1-5-10

Pour qu'une mesure μ définie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans L_1 soit faiblement absolument continue par rapport à P, il faut et il suffit que $\mu(N)$ soit nulle sur tout ensemble négligeable N.

Démonstration :

Pour x et y deux vecteurs de H fixés, $< \mu(.)\, x, y >$ est une mesure complexe. Cette mesure est absolument continue par rapport à P si et seulement si $< \mu(N)\, x, y > = 0$ pour tout ensemble négligeable. Par suite l'opérateur $\mu(N)$ est nul.■

Proposition 1-5-11

L'intégrale indéfinie de L (.), O.A.L. intégrable est une fonction faiblement absolument continue par rapport à P.

Démonstration :

En effet, pour tout ensemble négligeable N :

$$\| \int_N L\, x\, d\, P \| \leqslant \int_N \| L\, x \|\, d\, P = 0$$

$$\int_N L(\omega)\, d\, P(\omega) = 0 \quad \blacksquare$$

Remarque :

Comme l'intégrale indéfinie est fortement σ-additive, il est aisé de vérifier en suivant [15] page 197 que cette fonction est aussi fortement absolument-continue par rapport à P.

Proposition 1-5-12

Si L (ω) est un O.A.L. intégrable et de plus symétrique, E (L (ω)) est symétrique.

Exemple d'un opérateur aléatoire linéaire intégrable et non T_4-intégrable.

Considérons un espace de probabilité (Ω, $\mathcal{A}$, P) telle qu'il existe une partition $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de Ω jouissant des propriétés suivantes :

$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} A_m$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad A_n \in \mathcal{A}$ et $P(A_n) = \alpha \frac{1}{n^2}$ avec $\alpha = \frac{6}{\pi^2}$. Soit H un espace de HILBERT séparable de base $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dans ces conditions, considérons l'opérateur :

$$L(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n\, 1_{A_n}(\omega)\, |e_n><e_n| \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Pour ω fixé, il existe n de $\mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$ et L (ω) se réduit à $n\, |e_n><e_n|$; la série est convergente et définit un opérateur linéaire borné. De plus l'opérateur L (.) est mesurable.

Par ailleurs, $\forall\, \omega \in A_n$, $\| L(\omega) \| = n$ et $\int_\Omega \| L(\omega) \|\, dP(\omega) = \alpha \sum_n \frac{1}{n} = \infty$; ainsi, l'opérateur L (ω) n'est pas BOCHNER-intégrable. Cependant, pour tout vecteur $x = \sum_{n=1}^{\infty} <x, e_n> e_n$ de H pour tout ω de A_n, nous avons :

$$\| L(\omega)\, x \| = n\, |<x, e_n>| \text{ et il s'ensuit que :}$$

$$\int_\Omega \| L(\omega)\, x \|\, d\, P(\omega) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|<x, e_n>|}{n}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |<x, e_n>|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \frac{1}{n^2}} = \| x \|$$

L'opérateur E (L (ω)) est borné puisque $|| E (L (\omega) || = 1$. Nous avons même que :

$$E (L (\omega)) = \text{limite forte} \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{n} | e_n > < e_n |$$

sans être la limite en norme de cette série. Les matrices associées à L (ω) et E (L (ω)) s'écrivent :

$$L (\omega) = \begin{bmatrix} 1.1_{A_1} (\omega) & & & \\ & 2.1_{A_2} (\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & n.1_{A_n} (\omega) \end{bmatrix} \qquad E (L (\omega)) = \alpha \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

1-6 - Convergence presque-sure, convergence en probabilité

Pour deux opérateurs mesurables L (ω) et L' (ω), la différence L (ω) - L' (ω) est mesurable et par conséquent pour H séparable l'ensemble $\{\omega; L (\omega) \neq L' (\omega)\}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Définition 1-6-1

Deux O.A.L. L (ω) et L' (ω) sont dits presque-sûrement égaux si P (L $\neq$ L') = 0. C'est une relation d'équivalence.

Supposons de plus que L (ω) et L' (ω) soient intégrables. Ils sont donc D -intégrables et pour tout x, y, les variables $< L (\omega) x, y >$ et $< L' (\omega) x, y >$ sont presque-sûrement égales. D'après la proposition 5-5 et son corollaire II, nous obtenons les égalités $< E (L (\omega)) x, y > = \int < L (\omega) x, y > d P (\omega) = \int < L' (\omega) x, y > d P (\omega) = < E (L' (\omega)) x, y >$.

Les espérances mathématiques de deux O.A.L. presque-sûrement égaux, sont égales.

Définition 1-6-2

Une suite $\{L_n, n \geq 1\}$ d'O.A.L. est dite T-convergente presque sûrement si il existe un ensemble négligeable N tel que si $\omega \notin N$, lim $L_n (\omega)$ existe pour la topologie T. On notera $L_n \xrightarrow[T.p.s.]{} L$.

Comme l'espace L est semi-complet pour les trois topologies en considération, nous pouvons énoncer en une seule fois, le critère de convergence presque-sûre pour chacune des trois topologies.

Critère de Cauchy :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{L_n(\omega), n \geqslant 1\}$ d'opérateurs linéaires mesurables soit T-convergente presque sûrement est que la suite $\{L_m(\omega) - L_n(\omega); m, n > 1\}$ soit T-convergente presque-sûrement vers zéro.

Introduisons dans H séparable une base de vecteurs $\{e_1, e_2 \ldots e_n \ldots\}$ et le sous espace vectoriel H_o des combinaisons linéaires finies $\sum_{i=1}^{n} r_i e_i$ où r_i est rationnel et $n \in \mathbb{N}$, H_o est un espace vectoriel construit sur le corps des rationnels. La restriction à H_o de la norme de H est une norme. L'espace H_o n'est pas complet, son adhérence est précisément l'espace H de Hilbert séparable. L'ensemble des éléments de H_o est dénombrable.

Nous allons établir un résultat technique valable pour chacune des trois topologies mais nous effectuerons la démonstration uniquement dans le cas le plus difficile, c'est-à-dire, pour la topologie faible. Enonçons d'abord un lemme relatif à H.

Lemme :

Soit $z_n(\omega)$ une suite presque-sûrement bornée de vecteurs aléatoires. Si la suite est de Cauchy pour la convergence presque-sûre faible dans H_o, il existe un vecteur $z(\omega)$ de H, aléatoire, tel que :

$$z_n(\omega) \underset{\text{d. p. s.}}{\to} z(\omega)$$

Démonstration :

Nous savons que le dual topologique de H lui est isomorphe. Pour simplifier, nous allons considérer les vecteurs $z_n(\omega)$ comme des fonctionnelles sur H. Dire que $z_h^*(\omega)$ est une suite de Cauchy pour la convergence faible dans H_o signifie que :

$$\forall y \in H_o \quad \langle y, z_m(\omega) - z_n(\omega) \rangle \underset{n, m \to \infty}{\to} 0$$

Les vecteurs aléatoires forment une suite de Cauchy, presque sûrement pour la convergence faible dans H_o si $\forall y \in H_o$, il existe $N(y)$ ensemble négligeable de $\mathcal{A}$ tel que :

$$\forall \omega \notin N(y) \quad \langle y, z_m(\omega) - z_n(\omega) \rangle \underset{m, n \to \infty}{\to} 0$$

L'ensemble N de $\mathfrak{A}$ défini comme $\bigcup_{y \in H_o} N(y)$ est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables. La suite $z_n(\omega)$ possède la propriété suivante :

$$\forall z \in H_o \qquad \forall \omega \notin N \qquad < y, z_n(\omega) > \underset{n \to \infty}{\to} z(y, \omega)$$

La fonction qui, à $y \in H_o$, associe $z(y, \omega) \in \mathbb{C}$ pour chaque ω fixé, est linéaire. Elle est faiblement borné dans H_o.

Par hypothèse, $z_n(\omega)$ est une suite presque-sûrement bornée. Pour $\omega \notin N'$, ensemble négligeable convenable, il existe $K(\omega)$ tel que pour tout n : $|| z_n(\omega) || \leqslant K(\omega)$, par conséquent.

$$|| z(\omega) || = \sup_{z \in H_o} \frac{| < y, z(\omega) > |}{|| y ||} \leqslant K(\omega)$$

L'élément z de H_o est borné. C'est une fonctionnelle continue de H_o dans $\mathbb{C}$. Prolongeons z par continuité à l'espace H tout entier, soit $\tilde{z}$. Nous avons $|| z || = || \tilde{z} ||$. Finalement pour tout $\omega \notin N \cup N'$ négligeable $\forall y_o \in H_o \; < y_o, z_n > \underset{n \to \infty}{\to} < y_o, z >$.

D'après [42], théorème 3, page 121, la suite $z_n(\omega)$ tend vers $\tilde{z}(\omega)$ faiblement. Pour $\omega \in N \cup N'$, définissons $\tilde{z}(\omega) = 0$ et regroupons les résultats pour obtenir que $z_n(\omega) \underset{\text{d. p. s.}}{\to} \tilde{z}(\omega)$.■

Théorème 1-6-1

Si H est séparable, pour que la suite des opérateurs $L_n(\omega)$., linéaires mesurables, presque-sûrement bornée, converge presque-sûrement pour la topologie T_1, il suffit qu'il existe, pour tous vecteurs x, y de H_o, une suite sommable $\{\epsilon_n(x, y), n \geqslant 1\}$ de nombres réels positifs tels que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P [| < L_{n+1} - L_n) x, y > | > \epsilon_n(x, y)] < \infty$$

Démonstration :

D'après [30], proposition 2-4-2, il existe un ensemble N (x, y) négligeable tel que pour $\omega \notin N(x, y)$.

$$\lim_n < L_n(\omega) x, y > = < L_1(\omega) x, y >$$

$$+ \sum_1^{\infty} < (L_{n+1}(\omega) - L_n(\omega)) x, y >$$

existe. Soit $f_{x,\,y}(\omega)$ cette limite. L'ensemble négligeable N (x, y) dépend des deux vecteurs x, y et par suite la limite $f_{x,\,y}(\omega)$ n'est pas définie indépendamment de x et de y.

Fixons le vecteur x de H_o et laissons y varier dans l'espace H_o. De cette façon, l'ensemble :

$$N(x) = \bigcup_{y \in H_o} N(x, y)$$

est négligeable. Introduisons $z_n(\omega, x) = L_n(\omega)\, x$. La suite $z_n(\omega)$ x de vecteurs converge faiblement presque-sûrement et par conséquent constitue une suite de Cauchy pour la convergence faible presque-sûre. De plus, par hypothèse, la suite de vecteurs $z_n(\omega)$ est presque-sûrement bornée. Appliquons donc le lemme : il existe un vecteur aléatoire $z(\omega, x)$ tel que $z_n(\omega, x) \underset{\text{d. p. s.}}{\to} z(\omega, x)$.

Pour les vecteurs x de H_o, introduisons $N = \bigcup_{x \in H_o} N(x)$ ensemble négligeable de $\mathcal{A}$. Jusqu'à présent, nous avons :

$$\forall y \in H,\ \forall x \in H_o\ \ \forall \omega \notin N$$

$$\lim_{n \to \infty} \langle L_n(\omega)\, x,\, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle z_n(\omega, x),\, y \rangle = \langle z(\omega, x),\, y \rangle$$

Etudions pour ω fixé en dehors de N, l'opérateur qui, à x de H_o associe z (ω, x) de H. En utilisant la linéarité de $L_n(\omega)$, du produit scalaire et du passage à la limite, nous obtenons que l'application $L_o(\omega)$ qui, à $x \in H_o$, associe $z(\omega, x) \in H$ est linéaire. De plus cette application est continue : par hypothèse la suite $L_n(\omega)$ est presque sûrement bornée, c'est-à-dire, pour ω fixé en dehors d'un ensemble convenable négligeable N', il existe K (ω) tel que $\forall n \ \| L_n(\omega) \| \leqslant K(\omega)$ et par suite

$$\| z_n(\omega, x) \| \leqslant K(\omega) \| x \| \quad \text{et} \quad \| L_o(\omega) \| \leqslant K(\omega)$$

Prolongeons l'opérateur linéaire continu $L_o(\omega)$ à l'espace H tout entier. Soit L (ω) l'opérateur ainsi construit qui est évidemment linéaire continu et tel que $\| L(\omega) \| \leqslant K(\omega)$.

Nous savons déjà que pour tout vecteur y de H et tout vecteur x de H_o.

$$\langle L_n(\omega)\, x,\, y \rangle \underset{n \to \infty}{\to} \langle L_o(\omega)\, x,\, y \rangle = \langle L(\omega)\, x,\, y \rangle$$

Il est aisé de vérifier que la propriété s'étend pour tout vecteur x de H.

Pour $\omega \in N \cup N'$, nous définissons $L(\omega) = 0$. En conclusion $L_n(\omega) \xrightarrow[d.p.s.]{} L(\omega)$ où $L(\omega)$ est un opérateur linéaire borné. ■

Proposition 1-6-2

Soit $\{L_n(\omega), n \geqslant 1\}$ une suite d'O.A.L. tendant presque-sûrement faiblement vers $L(\omega)$, O.A.L. Dans ces conditions, la suite $\{L_n(\omega), n \geqslant 1\}$ est presque-sûrement bornée.

Démonstration :

Pour $\omega \notin N$ ensemble négligeable, $\{L_n(\omega), n \geqslant 1\}$ tend faiblement vers $L(\omega)$. La suite $< L_n(\omega)\, x, y >$ est bornée et par suite $L_n(\omega)$ est une suite faiblement bornée. D'après les théorèmes 0-2-4 et 0-3-1, elle est bornée en norme. ■

Définition 1-6-3

Une suite $\{L_n(\omega), n \geqslant 1\}$ d'O.A.L. converge fortement en probabilité vers l'opérateur linéaire mesurable presque-sûrement borné $L(\omega)$ si $\forall x \in H$ $P[\,||(L_n - L)\,x|| > \epsilon] \to 0$ pour tout $\epsilon > 0$ quand $n \to \infty$. On écrit $L \xrightarrow[T_2.\,P.]{} L$.

Nous avons une définition analogue pour la convergence en probabilité faible. Si H n'est pas séparable, pour la convergence uniforme il faut de plus que $||L_n - L||$ soit mesurable.

Proposition 1-6-3

La convergence de $L_n(\omega)$ vers $L(\omega)$ en probabilité T_4 implique la convergence en probabilité T_2 et la convergence en probabilité T_2 implique la convergence en probabilité T_1.

Démonstration :

Pour tout opérateur $L(\omega)$ aléatoire linéaire, nous avons :

$$\{\omega;\ ||L(\omega)|| > \epsilon\} = \{\omega;\ \sup_{||x|| = 1} ||L(\omega)\,x|| > \epsilon\}$$

$$= \bigcup_{||x|| = 1} \{\omega;\ ||L(\omega)\,x|| > \epsilon\}$$

Si $P[\,||L_n(\omega) - L(\omega)|| > \epsilon]$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini alors l'événement $||(L_n(\omega) - L(\omega))\,x|| > \epsilon$ impliqué par $||L_n(\omega) - L(\omega)|| > \epsilon$, voit sa probabilité tendre vers zéro quand n tend vers l'infini.

Le passage de T_2 à T_1 s'effectue de la même façon. ■

Théorème 1-6-4

Toute suite $\{L_n(\omega); n \geqslant 1\}$ d'O.A.L. qui converge T_i presque-sûrement, converge T_i en probabilité vers la même limite. Inversement, si H est séparable de toute suite $\{L_n, n \geqslant 1\}$ presque-sûrement bornée d'opérateurs linéaires mesurables qui converge T_i en probabilité, on peut extraire au moins une sous-suite qui converge T_i presque-sûrement vers la même limite.

Nous démontrerons cette proposition uniquement dans le cas de la topologie faible, les deux autres cas étant plus simples. Dans le cas de la topologie uniforme, si H n'est pas séparable, il faut cependant supposer que $\forall n \in \mathbf{N} \; || L_n(\omega) ||$ est mesurable.

Démonstration :

Soit $L(\omega)$ la limite presque-sûre de la suite $L_n(\omega)$. Pour la topologie faible quels que soient x et y,

$$\limsup P\{ | < (L_n - L)\, x,\, y > | > \epsilon \} \leqslant$$

$$P\{ \limsup | < (L_n - L)\, x,\, y > | > \epsilon \}$$

Pour tout $\omega \in N$ négligeable convenable $\limsup_n | < (L_n - L)\, x, y > | = 0$ et par conséquent $\limsup P\{ | < (L_n - L)\, x, y > | > \epsilon \} = 0$ et $L_n \xrightarrow[T_1]{P.} L$

Réciproque :

Nous connaissons l'existence d'un opérateur linéaire mesurable presque-sûrement borné $L(\omega)$ tel que :

$$L_n(\omega) \xrightarrow[T_1]{P.} L(\omega)$$

Pour tout x et tout y, la suite $< L_n(\omega)\, x, y >$ de nombres complexes tend en probabilité vers $< L(\omega)\, x, y >$. C'est une suite de Cauchy. Déterminons une sous-suite $S = \{L_{n_j}(\omega)\}$ de la suite $L_n(\omega)$ de la manière suivante. Le premier terme $n_1 = 1$; ensuite par récurrence n_j est le plus petit entier $N \geqslant n_{j-1}$ tel que :

$$P\{ | < L_r(\omega)\, x,\, y > - < L_s(\omega)\, x,\, y > | > \frac{1}{2^j} \} \leqslant \frac{1}{3^j} \text{ si } r \text{ et } s \geqslant N$$

Il résulte alors que, relativement à x et y fixés.

$$\sum_j P\{ | < (L_{n_{j+1}}(\omega) - L_{n_j}(\omega))\, x,\, y > | > \frac{1}{2^j} \} \leqslant \sum_j \frac{1}{3^j} < \infty$$

Introduisons de nouveau l'espace dénombrable H_o. Il en est de même de l'espace $H_o \times H_o$. Par conséquent une suite x_p, y_p recouvre tout l'espace $H_o \times H_o$.

Appelons S_1 la sous-suite de $L_n(\omega)$ extraite par la méthode antérieur et relativement à x_1, y_1. Supposons S_p déterminée, la méthode d'extraction permet d'obtenir S_{p+1}. Pour simplifier, les éléments de S_p sont notés $L_{p,q}(\omega)$. Si jusqu'à l'ordre p, nous avons :

$$\sum_{q=1}^{\infty} P\{ | < (L_{p,q+1}(\omega) - L_{p,q}(\omega)) x_k, y_k > | > \frac{1}{2^q} \} \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{3^q}$$

quel que soit $k = 1,2 \ldots p.$; à l'ordre $p+1$, les éléments $L_{p+1,q}(\omega)$, sont tels que :

$$P\{ | < (L_{p+1,q+1}(\omega) - L_{p+1,q}(\omega)) x_k, y_k > | > \frac{1}{2^q} \{ \leqslant \frac{1}{3^q}$$

quelque soit $k = 1, 2 \ldots p$. Nous conservons donc les inégalités pour les termes x , y avec $k = 1, 2 \ldots p$ lors du passage de S_p à S_{p+1}, mais en plus, nous en ajoutons de nouvelles relatives à x_{p+1}, y_{p+1}.

Introduisons la suite $S' = \{L'_p(\omega)\}$ où $L'_p(\omega) = L_{p,p}(\omega)$ diagonale. Quelque soit x_p, y_p, à partir du rang p tous les termes de S' appartiennent à S . Pour cette suite S', $\forall (x,y) \epsilon H_o \times H_o$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{ | < (L'_{p+1}(\omega) - L'_p(\omega)) x, y > | > \frac{1}{2^p} \} < \infty$$

Avec l'hypothèse supplémentaire que la suite $L_n(\omega)$ et par conséquent $L'_p(\omega)$ est presque sûrement bornée, nous appliquons le théorème 1. Et il existe $L'(\omega)$ limite faible presque-sûre de la sous-suite $L'_p(\omega)$, c'est à dire, il existe N négligeable tel que si $\omega \notin N$ $\forall x$, $\forall y$:

$$< L'_p(\omega) x, y > \rightarrow < L'(\omega) x, y >$$

Pour la suite de nombres complexes $< L_n(\omega) x, y >$ de Cauchy pour la convergence en Probabilité, il existe une sous-suite $< L'_p(\omega) x, y >$ tendant presque-sûrement vers $< L(\omega) x, y >$, qui est donc la limite en probabilité de $< L_n(\omega) x, y >$. L'opérateur aléatoire linéaire borné $L'(\omega)$ est la limite faible $L(\omega)$ en probabilité de la suite $L_n(\omega)$.■

La démonstration du théorème antérieur nous permet d'énoncer un Critère de Cauchy pour la convergence faible en Probabilité qui est une condition suffisante pour la convergence en Probabilité. La difficulté avec les opérateurs aléatoires, est de prouver que l'opérateur linéaire limite est borné.

Corollaire Critère de Cauchy

Pour H séparable, soit $\{L_n, n \geqslant 1\}$ une suite presque-sûrement bornée d'O.A.L. constituant une suite de Cauchy pour la convergence faible en probabilité. Il existe L (ω) O.A.L. limite faible en probabilité de la suite $\{L_n, n \geqslant 1\}$.

1-7 - Equi-intégrabilité, Convergence en moyenne

Nous donnons explicitement les définitions pour la topologie faible. Un simple changement de notations permet de passer de ce cas à la topologie forte. Pour la topologie uniforme, il faut ajouter que $||L(\omega)||$ est mesurable.

Définition 1-7-1

Une famille $\{L_i, i \in I\}$ d'opérateurs linéaires intégrables définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite faiblement équi-intégrable si :

$$\forall x, y \in H \quad \sup_{i \in I} \int_{|< L_i x, y >| > \alpha} |< L_i x, y >| \, dP \to 0$$

lorsque α tend vers l'infini.

L'équi-intégrabilité pour la topologie T_4 implique l'équi-intégrabilité pour la topologie T_2 et celle-ci, à son tour, implique la T_1-équi-intégrabilité.

Proposition 1-7-1

Toute famille $\{L_i (\omega), i \in I\}$ d'O.A.L. qui, pour tout x et tout y est telle que $|< L_i (\omega) x, y >| \leqslant l_{x,y} (\omega)$ où $i \in I$ et $l_{x,y} (\omega)$ est une famille à deux paramètres x, y de variables aléatoires réelles intégrables, est faiblement équi-intégrable. En particulier, toute famille finie de O.A.L. intégrables est T_1-équi-intégrables.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que :

$$\forall x, y \quad |< L_i x, y >| = X_i$$

est une variable aléatoire réelle positive et appliquer le critère pour les variables aléatoires positives. ■

Définition 1-7-2

Une famille $\{L_i, i \in I\}$ d'opérateurs linéaires intégrables définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite faiblement équi-continue si :

$\forall x, y \in H$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta_\epsilon (x, y)$ tel que $P(A) < \eta_\epsilon (x, y)$ implique $\sup_{i \in I} \int_A |< L_i x, y >| \, dP < \epsilon$.

Proposition 1-7-2

Une famille $\{L_i, i \in I\}$ d'O.A.L. est faiblement équi-intégrable si et seulement si :

a) la famille est T_1-équi-continue

b) $\sup_{i \in I} \int_\Omega | < L_i x, y > | d P < \infty$ pour tout x et tout y.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que $\forall x, y \ | < L_i x, y > | = X_i$ est une variable aléatoire réelle positive et appliquer le théorème correspondant pour les variables aléatoires réelles (cf. [30] page 48 Prop. 2-5-2). ■

Définition 1-7-3

Une suite $\{L_n, n \geqslant 1\}$ d'opérateurs aléatoires linéaires intégrables est dite converger faiblement en moyenne d'ordre 1 vers l'opérateur linéaire intégrable L (ω) si

$\forall x, y \in H \int | < (L_n - L) x, y > | d P \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. On note $L_n \xrightarrow[T_1, L_1]{} L$. Pour les topologies T_2 et T_4, nous avons les définitions équivalentes :

$$L_n \xrightarrow[T, L_1]{} L \text{ si } \forall x \in H \quad \int || (L_n - L) x || d P \underset{n \to L}{\to} 0 \quad \text{et}$$

$$L_n \xrightarrow[T_4, L_1]{} L \text{ si } \int || L_n - L || d P \to 0$$

On suppose implicitement que $||L_n - L||$ est mesurable et intégrable.

La définition précédente définit dans l'espace vectoriel $\mathbb{L}_1 = \{L(.)$ mesurable; $\forall x \in H \int || L (\omega) x || d P (\omega) < \infty\}$ introduit au § 5 trois topologies différentes. Pour la topologie provenant des semi-normes :

$$p_x (L (.)) = \int || L (\omega) x || d P (\omega) \qquad \forall x \in H$$

nous retrouvons l'espace $\mathbb{L}_{1, f}$.

Un O.A.L. intégrable et non T_4-intégrable peut être la limite au sens de la norme $p (L (.)) = \int || L (\omega) || d P (\omega)$ d'une suite d'O.A.L. intégrables. Pour cette topologie, l'espace vectoriel $\mathbb{L}_1$ sera noté $\mathbb{L}_{1, u}$ et l'espace vectoriel normé des O.A.L. T_4-intégrables est un sous-espace vectoriel semi-complet de $\mathbb{L}_{1, u}$.

Le même problème se pose avec les semi-normes :

$$\forall x, y \in H \qquad p_{x, y} (L (.)) = \int | < L (\omega) x, y > | d P (\omega)$$

On pourrait noter $\mathbb{L}_{1, d}$ l'espace $\mathbb{L}_1$ muni de la topologie définie par ces semi-normes.

Proposition 1-7-3

Pour que la suite $\{L_n,\ n \geqslant 1\}$ d'opérateurs aléatoires linéaires intégrables converge faiblement en moyenne d'ordre 1 vers L opérateurs linéaire intégrable, il faut que :

$$\forall A \in H \qquad \int_A L_n \to \int_A L$$

uniformément en A.

En particulier si $L_n \underset{T_1,\ L_1}{\to} L$ et si $P(A_n \Delta A) \to 0$ alors $\int_{A_n} L_n \underset{T_1,\ L_1}{\to} \int_A L$.

Comme précédemment, nous énonçons le théorème et effectuons la démonstration uniquement dans le cas de la topologie T_1.

Démonstration :

$$\left| < \left(\int_A L_n \, d P - \int_A L \, d P\right) x, y > \right| \leqslant \int_A \left| < (L_n - L) x, y > \right| d P$$
$$\leqslant \int_\Omega \left| < (L_n - L) x, y > \right| d P \to 0$$

Si $L_n \underset{T_1,\ L_1}{\to} L$ et si $P(A_n \Delta A) \underset{n \to \infty}{\to} 0$ alors

$$\left| < \left(\int_{A_n} L_n \, d P - \int_A L \, d P\right) x, y > \right| \leqslant \int_{A_n} \left| < (L_n - L) x, y > \right| d P$$
$$+ \left| < \left(\int_{A_n} L \, d P - \int_A L \, d P\right) x, y > \right|$$

Le premier terme tend vers zéro puisque L_n tend vers L pour la convergence en moyenne d'ordre 1 et pour la topologie faible. Le second terme tend vers zéro en raison de l'intégrabilité de L qui implique l'équi-continuité faible de L. ■

Nota :

Il manque la réciproque qui est vraie pour les variables aléatoires réelles.

Proposition 1.7.4

Soit $\{L_n,\ n \geqslant 1\}$ une suite d'O.A.L. intégrables convergeant T_1 en moyenne d'ordre 1 vers L opérateur aléatoire linéaire intégrable. Alors la suite $\{L_n,\ n > 1\}$ est de Cauchy pour la convergence faible en moyenne d'ordre 1. La suite $\{L_n,\ n > 1\}$ est faiblement équi-intégrable et tend faiblement en probabilité vers L (ω).

Démonstration :

Par hypothèse $\forall x, y \in H \quad \int |<(L_n(\omega) - L(\omega))x, y>| dP(\omega) \underset{n \to \infty}{\to} 0.$

Par suite, nous obtenons la première partie du théorème :

$$\int |<(L_n(\omega) - L_m(\omega)x, y> dP(\omega) \leqslant \int |<(L_n(\omega) - L(\omega))x, y>| dP(\omega) + \int |<(L(\omega) - L_m(\omega))x, y> dP(\omega)$$

et les deux termes du second membre tendent vers zéro.

Démontrons maintenant la convergence faible en probabilité de la suite $\{L_n, n \geqslant 1\}$ vers L.

Elle n'est pas impliquée par la propriété de la suite $\{L_n, n > 1\}$ d'être de Cauchy mais directement parce qu'elle tend vers L faiblement en moyenne : il manque le critère de Cauchy pour la convergence en probabilité.

$$P[|<(L_n(\omega) - L(\omega))x, y>| > \epsilon] \leqslant \frac{1}{\epsilon} \int |<(L_n(\omega) - L(\omega))x, y>| dP(\omega) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

Finalement la suite est équi-intégrable :

$\forall x, \forall z$, introduisons $z_n(\omega, x, y) = <L_n(\omega)x, y>$ qui tend en moyenne d'ordre 1 vers $<L(\omega)x, y>$.

Par conséquent [30] page 50 Prop. 2.5.4, la suite $z_n(\omega, x, y)$ est équi-intégrable et :

$$\forall x, \forall y \quad \sup_{\{|<L_n(\omega)x, y>| > \alpha\}} \int |<L_n(\omega)x, y>| dP(\omega) \underset{\alpha \to \infty}{\to} 0 \quad \blacksquare$$

Nota :

Il manque la réciproque du théorème pour plusieurs raisons : 1°) La convergence T_1 en probabilité implique l'existence d'une sous-suite convergeant T_1 presque-sûrement si on ajoute que la suite est p. s. bornée et que H est séparable. 2°) Cette même hypothèse suffit pour assurer la validité du critère de Cauchy pour la convergence en probabilité. (Théorème 6.4 et son corollaire). 3°) L'existence $\forall x, \forall y$ de $\int |<L(\omega)x, y>| dP(\omega)$ n'implique pas que $L(\omega)$ soit intégrable.

■

CHAPITRE 2

INTEGRATION ET ESPERANCE: CONDITIONNELLE

2-1 - Mesures à valeurs dans L

Définition 2-1-1

Une mesure μ sur une σ-algèbre $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω est une application de Ω dans L telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et telle que :

$$\mu\left(\sum_I A_i\right) = \sum_I \mu(A_i) \qquad (\sigma\text{-additivité})$$

pour toute famille dénombrable $\{A_i;\ i \in I\}$ de parties de Ω dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjointes. Une mesure μ serait dite non finie si pour certains ensembles A de $\mathcal{A}$, l'opérateur $\mu(A)$ serait non borné; sauf avis contraire, les mesures que nous considérons, sont finies.

Pour la σ-additivité, la topologie de L intervient et on parlera de mesure faiblement, fortement ou uniformément σ-additive. Il est clair que toute mesure uniformément σ-additive est fortement σ-additive.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier plus spécialement les mesures fortement σ-additives et séparer les propriétés qui proviennent de la σ-additivité forte, des propriétés qui proviennent de la définition de $\mu(A)$ comme élément de L pour tout A de $\mathcal{A}$. L'équivalent pour les mesures réelles de cette dernière propriété est d'être partout finie.

Remarquons que, même dans L_S, la relation d'ordre n'est pas totale et qu'il ne peut donc y avoir d'équivalent du théorème de Jordan-Hahn, pour cette ordre (voir chapitre 0 § 6.)

Définition 2-1-2

a) Une fonction μ définie sur une classe C de sous-ensembles de Ω et à valeurs dans L est à variations (uniformes) finies sur A sous-ensemble de Ω si quelque soit la suite $\{E_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ d'ensembles disjoints de C et sous-ensembles de A, l'on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \| \mu(E_n) \| < \infty.$$

b) Une fonction μ définie sur une classe C de sous-ensembles de Ω et à valeurs dans L est à variations (uniformes) bornées sur A sous-ensemble de Ω si il existe une constante K positive telle que pour toute suite finie disjointe $\{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ d'ensembles de C et sous-ensembles de A, l'on a :

$$| P(A) | \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{p} || \mu(E_n) || \leqslant K$$

Remarquons que si μ est à variations bornées sur A alors μ est à variations finies sur A. Le lemme II démontre que dans certains cas, la réciproque est vraie. On note μ v.n.b. sur B pour dire que μ n'est pas à variations bornées sur B.

Théorème 2-1-1 *

Si μ est une fonction de $\mathfrak{A}$ à valeurs dans L, σ-additive pour la topologie faible et à variations finies, il existe une mesure ν finie positive sur $\mathfrak{A}$ telle que pour tout E de $\mathfrak{A}$, $|| \mu(E) || \leqslant \nu(E)$. De plus si μ est faiblement absolument continue par rapport à P alors de la même façon ν est absolument continue par rapport à P.

La démonstration nécessite deux lemmes.

Lemme I

Si μ est une fonction de $\mathfrak{A}$ à valeurs dans L, σ-additive pour la topologie faible alors $|| \mu(E) ||$ est sous-additive.

Démonstration :

Soit $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ un ensemble quelconque de $\mathfrak{A}$. Pour tout vecteur x et tout vecteur y de H, $< \mu(\Sigma E_k) x, y > = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} < \mu(E_k) x, y >$

par définition de la σ- additivité faible.

* Ce théorème est dû principalement à Monsieur Alvarez de Avaya.

Par suite passant aux modules.

$$|<\mu(\sum_1^\infty E_k)\ x, y>| \leqslant \sum_1^\infty |<\mu(E_k)\ x, y>|$$

Pour tout k, utilisons la norme de $\mu(E_k)$ pour majorer le module correspondant :

$$|<\mu(E_k)\ x, y>| \leqslant ||\mu(E_k)||\ ||x||\ ||y||$$

La série des modules étant convergente puisque croissante :

$$|<\mu(\sum_1^\infty E_k)\ x, y>| \leqslant \sum_1^\infty ||\mu(E_k)||\ ||x||\ ||y||$$

Si les vecteurs x et y sont de norme égale à 1, l'inégalité devient :

$$|<\mu(\sum_1^\infty E_k)\ x, y>| \leqslant \sum_1^\infty ||\mu(E_k)||$$

Prenons successivement les bornes supérieures sur x et sur y :

$$||\mu(\sum_1^\infty E_k)\ x|| \leqslant \sum_1^\infty ||\mu(E_k)||$$

$$||\mu(\sum_1^\infty E_k)|| \leqslant \sum_1^\infty ||\mu(E_k)||$$

C'est l'inégalité du lemme. ■

Lemme 2

Si μ est une fonction de $\mathcal{A}$ à valeurs dans L σ-additive pour la topologie faible et à variations finies, alors μ est à variations bornées.

Démonstration :

Les hypothèses du lemme impliquent que tous les ensembles E de $\mathcal{A}$ sont de variations bomées, par une constante K convenable. Effectuons-en la démonstration par contradiction. Si E est de v. n. b. alors pour toute partition $E_o, E_1 \ldots, E_n$ $n \geqslant 1$ de E, il existe un ensemble par exemple E_o de v. n. b.

Supposons d'abord que pour toute partition de E si E_o est un ensemble de v. n. b., $\sum_{k=1}^{n} \|\mu(E_k)\| \leqslant 1$.

Pour tout n, il existe une partition P telle que $|P| \geqslant n+1$. Avec l'hypothèse supplémentaire, il existe $E_{o,n}$ tel que $\|\mu(E_{o,n})\| + \sum_{k=1}^{n} \|\mu(E_{k,n})\| \geqslant n+1$ et $\|\mu(E_{o,n})\| \geqslant n$. L'ensemble $E_{o,n}$ a les deux mêmes propiétés que E. Par suite, on peut construire une suite de partitions $P_1, P_2 \ldots P_n \ldots$ respectivement de $E_o \supset E_{o,1} \ldots \supset E_{o,n} \ldots$ Soit $F = \bigcap_n E_{o,n}$.

Nous obtenons les relations entre ensembles

$$\forall n \qquad E_{o,n} = F + \sum_{k=n}^{\infty} (E_{o,k+1} - E_{o,k})$$

Pour la fonction μ, ces égalités se traduisent par:

$$\|\mu(E_{o,n})\| \leqslant \|\mu(F)\| + \sum_{k=n}^{\infty} \|\mu(E_{o,k+1} - E_{o,k})\|$$

d'après le lemme antérieur. Nous obtenons ainsi une première contradiction puisque d'une part $\|\mu(E_{o,n})\| \geqslant n$ et que d'autre part $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mu(E_{o,k+1} - E_{o,k})\| = |P| < \infty$ où P est la partition composée des ensembles $(E_{o,k+1} - E_{o,k})$.

Ainsi dans E quelconque de $\mathcal{A}$ de v. n. b., il existe une partition $P = \{E_o, E_1 \ldots E_n\}$ telle que E_o soit de v. n. b. et telle que $\sum_{k=1}^{n} \|\mu(E_k)\| > 1$. De nouveau, considérons la suite $E_o \supset E_{o,1} \supset E_{o,n} \ldots$ définie par récurrence. $E_{o,n}$ est de v. n. b. et il existe une partition de $E_{o,n}$ telle que $E_{o,n+1}$ soit de v. n. b. et telle que $\sum_{k=1}^{K(n+1)} \|\mu(E_{k,n+1})\| > 1$.

Introduisons maintenant la partition :

$$P = \{\bigcap_n E_{o,n}, E_{k,n} ; \qquad k = 1 \ldots K(n) \text{ et } n = 1, 2 \ldots\}$$

Le nombre d'ensembles intervenant dans P, est dénombrable et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K(n)} \| \mu (E_{k,n}) \| = \infty$$

Il y a de nouveau contradiction avec l'hypothèse du lemme et E est de variations bornées. En particulier, Ω est de variations bornées. Soit K une majoration de $| P |$ pour toute partition P de Ω. C'est aussi une majorante pour toute partition de E quelconque de $\mathfrak{A}$.■

Pour tout ensemble E de $\mathfrak{A}$ introduisons maintenant la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$\nu (E) = \sup \{ \sum_{n=1}^{\infty} \| \mu (E_n) \|; \qquad E = \sum_{1}^{\infty} E_n, \; E_n \in \mathfrak{A}\}$$

Démontrons maintenant le théorème. Montrons que ν (E) est une mesure et que $\| \mu (E) \| \leqslant \nu (E)$ quelquesoit $E \in \mathfrak{A}$.

Déjà ν (E) est positif. L'ensemble E constitue à lui-seul une partition de E, par suite $\| \mu (E) \| \leqslant \nu (E)$. D'après le lemme antérieur, pour toute partition P de E, nous avons $| P (E) | = \sum_{k=1}^{n} \| \mu (E_k) \| \leqslant K$.

Par passage à la limite, nous obtenons $\nu (E) \leqslant K$.

Il reste uniquement à démontrer la σ - additivité de ν. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite G_m telle que $E = \sum_m G_m$ et $\nu(E) \leqslant \sum_m \| \mu (G_m) \| + \epsilon$.

Comme $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, nous avons $G_m = \sum_{n=1}^{\infty} (G_m \cap E_n)$ qui se traduit sur la fonction μ en $\| \mu (G_m) \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| \mu (G_m \cap E_n) \|$ Par suite regroupant les deux inégalités :

$$\nu (E) \leqslant \sum_m (\sum_{n=1}^{\infty} \| \mu (G_m \cap E_n) \|)$$

$$+ \epsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu (E_n) + \epsilon$$

L'inégalité étant satisfaite pour tout ϵ, nous arrivons à $\nu (E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu (E_n)$.

Par ailleurs il existe une suite $G_{n,m}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$:

$$\nu(E_n) \leqslant \sum_m \| \mu(G_{n,m}) \| + \frac{\epsilon}{2^n}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \leqslant \sum_n \left(\sum_m \| \mu(G_{n,m}) \| + \frac{\epsilon}{2^n} \right) \leqslant \nu(E) + \epsilon$$

De cette dernière expression valable pour tout ϵ, nous déduisons que $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \leqslant \nu(E)$.

Les deux inégalités impliquent l'égalité.

Finalement, supposons que μ soit absolument continue par rapport à P. Pour tout ensemble négligeable N, $\mu(N) = 0$ et pour tout sous-ensemble E_n de N de même $\mu(E_n) = 0$. Par suite:

$\nu(N) = \sup \{ \sum_1^{\infty} \| \mu(E_n) \| ; N = \Sigma E_n, E_n \in \mathcal{A} \}$ est nul. D'après [30], page 104, corollaire 2, $\nu(.)$ est absolument continue par rapport à P. Par suite μ est uniformément absolument continue par rapport à P.■

Théorème 2-1-2

Si H est séparable et si μ est une fonction de $\mathcal{A}$ à valeurs dans L, σ - additive pour la topologie faible de variations finies et faiblement absolument continue par rapport à P, alors μ est l'intégrale indéfinie d'un O.A.L. L (ω), T_4 - intégrable.

Démonstration :

Pour H, espace de Hilbert séparable, introduisons de nouveau, l'espace vectoriel H_0 construit sur le corps des rationnels, dense dans H. L'ensemble des éléments de H_0 est dénombrable comme nous l'avons vu précédemment paragraphe 1.6. Pour un élément (x, y) de $H_0 \times H_0$ considérons $< \mu(E)\, x, y >$. C'est une fonction de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, σ - additive d'ensemble et absolument continue par rapport à P.

Le théorème de Radon - Nikodym implique l'existence d'une fonction mesurable $f(x, y, \omega)$ définie presque partout et telle que pour tout $E \in \mathcal{A}$.

$$< \mu(E)\, x, y > = \int_E f(x, y, \omega)\, d P(\omega)$$

Soit e_n une base de l'espace H et donc aussi une base de H_o. Les fonctions $f(e_n, e_m, \omega)$ sont définies presque partout.

D'après les hypothèses, utilisant les résultats du théorème 1, antérieur, il existe une mesure positive $\nu(E)$ absolument continue par rapport à P et telle que $\| \mu(E) \| \leqslant \nu(E)$ pour tout $E \in \mathfrak{A}$. Par suite d'après le théorème de Radon - Nikodym, il existe une fonction mesurable $r(\omega)$ définie presque partout telle que $\nu(E) = \int_E r(\omega)\, d\,P(\omega)$. De plus comme ν est positive bornée $r(\omega)$ est partout positive et intégrable. Pour tout x, y de H_o x H_o, nous avons de plus les inégalités $\forall\, E \in \mathfrak{A}$ $| < \mu(E)\, x, y > | \leqslant \| \mu(E) \| \, \| x \| \, \| y \| \leqslant \nu(E) \| x \| \, \| y \|$ qui impliquent l'inégalité presque sûre $|f(x, y, \omega)| \underset{p.s.}{\leqslant} \sqrt{2}\, r(\omega) \| x \| \, \| y \|$.

Introduisons alors un ensemble négligeable N' tel que pour tout ω n'appartenant pas à N', chacune des fonctions $f(e_n, e_m, \omega)$ soit définie. Pour tout ω n'appartenant pas à N', par combinaison linéaire définissons $f(x, y, \omega)$ où x et y sont deux vecteurs quelconques de H_o : Si $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ par définition $\tilde{f}(x, y, \omega) = \sum_{k,h} c_k \bar{d}_k f(e_k, e_h, \omega)$.

Pour tout ensemble E de $\mathfrak{A}$, nous obtenons grâce à la linéarité de l'opérateur $\mu(E)$ la relation :

$$< \mu(E)\, x, y > = \int_E \tilde{f}(x, y, \omega)\, d\,P(\omega)$$

En raison de l'unicité de la décomposition de Radon - Nikodym de la mesure $< \mu(E)\, x, y >$ les fonctions $f(x, y, \omega)$ et $\tilde{f}(x, y, \omega)$ sont presque-sûrement égales. De plus, la fonction $\tilde{f}(x, y, \omega)$, pour tout ω n'appartenant pas à N', est linéaire en x et antilinéaire en y, $|\tilde{f}(x, y, \omega)| \underset{p.s.}{\leq} r(\omega) \| x \| \, \| y \|$ pour tout vecteur x, y, de H_o. Introduisons alors un ensemble négligeable N contenant N', de façon que pour tout $\omega \notin N$, les inégalités $|\tilde{f}(x, y, \omega)| \leqslant \sqrt{2}\, r(\omega) \| x \| \, \| y \|$ soient vérifiées pour tout vecteur x et tout vecteur y de H_o.

Comme l'espace H_o est dense dans H, prolongeons par continuité, la fonction $\tilde{f}(x, y, \omega)$ à ω fixé, à tous les vecteurs x, y de H. La fonction ainsi obtenue de H x H dans $\mathbb{C}$ est pour chaque ω de N^c, linéaire en x, antilinéaire en y et de plus $|f(x, y, \omega)| \leqslant \sqrt{2}\, r(\omega) \| x \| \, \| y \|$.

Le théorème 0.1.1, implique l'existence pour chaque ω de N^c d'un opérateur L (ω) tel que pour tout x et pour tout y de H, nous ayons l'égalité $< L(\omega)\, x, y > = \tilde{f}(x, y, \omega)$. Cet opérateur est continue. Pour $\omega \in N$, donnons à L (ω) la valeur zéro. Comme chacune des fonctions $\tilde{f}(x, y, \omega)$ est mesurable pour x, y de H_o, l'opérateur L (ω) est mesurable par passage à la limite de fonctions mesurables.

Finalement comme la norme de L (ω) est majorée par r (ω) fonction intégrable, d'après la définition 1-4-2, L (ω) est un O.A.L. T_4 intégrable et pour tout $E \in \mathcal{A}$, nous avons $\mu(E) = \int_E L(\omega)\, d P(\omega)$ puisque les deux membres de l'expression ont un sens et que pour tout x et tout y de H, $< \mu(E)\, x, y > = \int_E < L(\omega)\, x, y > d P(\omega)$. ■

Complétion d'un espace probabilisable par une mesure μ à valeurs dans L.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et soit μ une mesure finie à valeurs dans L. Supposons pour fixer les idées que μ soit fortement σ-additive. Pour tout vecteur x de H, la fonction vectorielle $\mu(.)\, x$ est une mesure à valeurs dans H. Soit N_x, la famille des ensembles $\mu(.)\, x$ négligeables. Pour définir un ensemble $\mu(.)\, x$ négligeable, on introduit (cf. [15], p. 197, déf. 2.14) la semi-variation $\tilde{\mu}_x : E \rightarrow \sup \{ || \mu(A)\, x ||;$ $A \in \mathcal{A}$ et $A \subset E\}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ et la semi-variation extérieure $\tilde{\mu}^*_x$: $F \rightarrow \inf \{\tilde{\mu}^*_x (E),\ E \in \mathcal{A}$ et $F \subset E\}$ de $P(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$. Un ensemble N est $\mu(.)\, x$ négligeable si $\tilde{\mu}^*_x (N) = 0$. La famille $\mathcal{A}_x = \mathcal{A} \cup N_x$ est une σ-algèbre de BOOLE et la fonction $\mu_x(.)$ extension de $\mu(.)\, x$ à la famille $\mathcal{A}_x$, définie quelque soit $A \cup N_x$ de $\mathcal{A} \cup N_x$ par $\mu_x (A \cup N_x) = \mu(A)\, x$, est une mesure vectorielle comme on peut le vérifier (cf. [30], p. 16, [15], p. 198).

Théorème 2-1-3

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable sur lequel est définie une mesure μ fortement σ-additive à valeurs dans L. La fonction d'ensembles $\bar{\mu}$ définie sur la σ-algèbre $\bar{\mathcal{A}} = \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x$ par la formule:

$$\forall x \in H \qquad \forall A \in \bar{\mathcal{A}} \qquad \bar{\mu}(A)\, x = \mu_x (A)$$

est une mesure fortement σ-additive non nécessairement finie à valeurs dans L. Si μ est bornée alors $\bar{\mu}$ est bornée. L'espace $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ est l'espace fortement complété de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Dans le cas d'une mesure uniformément σ-additive ou faiblement σ-additive, on définit un complété uniforme ou un complété faible par une méthode semblable.

Démonstration :

La classe $\mathfrak{A}_x$ est une σ-algèbre de BOOLE et l'extension $\mu_x(.)$ de $\mu(.)$ x est définie de façon univoque. Si $A \in \mathfrak{A}$ pour tout x de H, il existe A_x, N_x, B_x tels que $A = A_x \cup N_x$, $N_x \subset B_x$, $B_x \in \mathfrak{A}$ et $\widetilde{\mu_x}(B_x) = 0$, alors $\mu(A)\, x = \mu_x(A) = \mu(A_x)\, x$.

Vérifions que l'application $\bar{\mu}(A)$ est linéaire en x. Soient $x, y \in H$. Relativement à y, introduisons les ensembles correspondants A_y, N_y et B_y. Par suite $A = A_x \cup N_x = A_y \cup N_y$ ou encore $A = (A_x \cup A_y) \cup (N_x \cap N_y)$ avec $N_x \cap N_y \subset B_x \cap B_y$. Nous en déduisons que $\widetilde{\mu}(B_x \cap B_y)(x + y) = 0$, que $N_x \cap N_y \in N_{x+y}$ et que $\bar{\mu}(A)(x + y) = \mu(A_x \cup A_y)(x + y) = \mu(A_x \cup A_y)\, x + \mu(A_x \cup A_y)\, y$. Par ailleurs comme $A_x \cup A_y \subset A$, nous avons $(A_x \cup A_y) \triangle A_x = (A_x \cup A_y) - A_x \subset N_x$ et par suite $\bar{\mu}(A)\, x = \mu_x(A) = \mu(A_x)\, x = \mu(A_x \cup A_y)\, x$. En utilisant la même propriété en y, il résulte que $\bar{\mu}(A)(x + y) = \bar{\mu}(A)\, x + \bar{\mu}(A)\, y$. Une démonstration similaire nous donne :

$$\forall x \in H \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad \bar{\mu}(A)(\alpha x) = \alpha\, \bar{\mu}(A)\, x$$

Pour tout A de $\mathfrak{A}$, la fonction $\bar{\mu}(A)$ est linéaire.

Pour tout x de H, la σ-additivité de $\bar{\mu}(.)\, x$ provient de la σ-additivité de $\mu_x(.)$.

Soit $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite décroissante d'ensembles de $\overline{\mathfrak{A}}$ convergeant vers Φ. Soit $A_{x,n}$ et $N_{x,n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, les suites associées. Comme $A_n = A_{x,n} \cup N_{x,n}$, la suite $A_{x,n}$ converge vers Φ et $\bar{\mu}(A_n)\, x = \mu_x(A_n) = \mu(A_{x,n})\, x$ converge vers zéro.

Si la mesure μ est bornée, c'est-à-dire si il existe K positif tel que $\forall A \in \mathfrak{A}$:

$\| \mu(A) \| \leqslant K$ alors $\forall A \in \overline{\mathfrak{A}}$ $\forall x \in H$, nous avons
$\| \bar{\mu}(A)\, x \| = \| \mu(A_x)\, x \| \leqslant K \| x \|$ et $\bar{\mu}$ est bornée par K. ■

Dorénavant, un espace probabilisable muni d'une mesure μ bornée à valeurs dans L sera supposé complété fortement si μ est fortement σ-additive, faiblement si μ est faiblement σ- additive, et uniformément si μ est uniformément σ-additive.

Intégration d'une fonction réelle par rapport à une mesure μ à valeurs dans L.

En premier lieu, nous allons considérer l'intégration des fonctions simples. Soit $f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i . 1_{S_i}(\omega)$ une fonction simple où :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \qquad S_i \in \mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} S_i = \Omega$$

Par définition, l'intégrale $\int f(\omega)\, d\mu(\omega)$ de $f(\omega)$ par rapport à une mesure μ à valeurs dans L, est l'opérateur $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(S_i)$ de L. La définition est indépendante de la topologie introduite dans L. L'application $f \to \int f\, d\mu$ est linéaire. Quels que soient x, y de H, $< \int f\, d\mu\, x, y > = \int f\, d < \mu\, x, y >$.

Introduisons pour tout x de H, la fonction suivante de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ appelée variation totale forte de μ:

$$A \to \nu_x(A) = \sup \{ \sum_{i=1}^{\infty} \| \mu(E_i)\, x \| ; \sum_{i=1}^{\infty} E_i = A \ \forall i \ E_i \in \mathcal{A} \}$$

Par une démonstration semblable à celle du théorème 1, on voit que ν_x est une mesure réelle positive définie sur $\mathcal{A}$. Nous avons même les inégalités :

$$\forall x \in S \qquad \forall A \in \mathcal{A} \qquad \| \mu(A)\, x \| \leqslant \nu_x(A) \leqslant \nu(A)$$

Pour chaque mesure ν_x, nous définissons l'espace vectoriel $L_1(\nu_x)$ des fonctions f réelles d'une variable réelle intégrable par rapport à ν_x. L'intersection de ces espaces quand x varie dans H, sera notée par définition $L_{1,f}(\mu)$ et est dotée de la topologie provenant des semi-normes:

$$\forall x \in H \qquad q_x(f) = \int |f|\, d\nu_x \quad \text{pour toute fonction f de :}$$

$$L_{1,f}(\mu) = \bigcap_{H} L_1(\nu_x)$$

Proposition 2-1-4

L'ensemble des fonctions simples de $L_{1,f}(\mu)$ est dense dans $L_{1,f}(\mu)$.

Démonstration :

Soit f une fonction de $L_{1,f}(\mu)$. Nous pouvons nous limiter à des fonctions f positives. Dans ces conditions, f est la limite ponctuelle d'une suite croissante de fonctions simples f_n, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout x de H, on a $f_n(x) \leqslant f(x)$ quelque soit n. Par conséquent $q_x(f - f_n)$ tend vers zéro par le théorème de LEBESGUE.■

Proposition 2-1-5

L'application $\int . \, d\,\mu$ qui, à une fonction simple de $L_{1,f}(\mu)$ associe son intégrale par rapport à μ, est continue de $L_{1,f}(\mu)$ dans L_f.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que :

$$\forall x \in H \qquad \left\| \int f(\omega)\, d\,\mu(\omega)\, x \right\| \leqslant \int |f(\omega)|\, d\,\nu_x(\omega). \blacksquare$$

Définition 2-1-3

Les fonctions f mesurables et appartenant à $L_{1,f}(\mu)$ sont dites fortement intégrables par rapport à μ.

Cette définition est légitime puisque toute fonction f mesurable de $L_{1,f}(\mu)$ adhère au sous-ensemble des fonctions g simples de $L_{1,f}(\mu)$ qui satisfont :

$$\forall x \in H \qquad \int |g|\, d\,\nu_x \leqslant \int |f|\, d\,\nu_x$$

et d'après [5], prop. 8, chap. 3, § 2; l'application $\int . \, d\,\mu$ s'étend de façon unique à une application linéaire continue sur $L_{1,f}(\mu)$. La valeur de l'extension de $\int . \, d\,\mu$ sur $f \in L_{1,f}(\mu)$ est par définition l'intégrale forte $\int f\, d\,\mu$ de f par rapport à la mesure μ fortement σ-additive.

En raison de la continuité de l'opérateur $\int . \, d\,\mu$, nous obtenons que

$$\forall x, y \in H \qquad \langle \int f\, d\,\mu\, x, y \rangle = \int f\, d \langle \mu\, x, y \rangle$$

L'intégrale définie de f sur $A \in \mathfrak{A}$ vaut par définition l'intégrale de $f 1_A$ que nous noterons $\int_A f\, d\,\mu = \int f 1_A\, d\,\mu$.

Théorème 2-1-6

La fonction $A \to \int_A f\, d\,\mu$ pour $f \in L_{1,f}(\mu)$ de $\mathfrak{A}$ dans L_f est une mesure fortement σ-additive à valeurs dans L.

Démonstration :

L'additivité s'obtient directement et pour obtenir la σ-additivité forte, considérons une suite $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$ décroissante vers Φ d'ensembles de $\mathfrak{A}$. Il vient :

$$\forall x \in H \qquad \left\| \int_{A_n} f\, d\,\mu\, x \right\| = \left\| \int f\, 1_{A_n}\, d\,\mu\, x \right\| \leqslant \int |f|\, 1_{A_n}\, d\,\nu_x$$

$$= \int_{A_n} |f|\, d\,\nu_x \searrow 0 \blacksquare$$

Nota :

Après avoir défini les mesures ν (.) et $\forall x \in H\ \nu_x$ (.), il est normal d'introduire $\nu_{x,\ y}(A) = \sup \{ \sum_{i=1}^{\infty} | < \mu(E_i)\ x,\ y > | ;\ \sum_{i=1}^{\infty} E_i = A ;\ \forall i\ E_i \in \mathcal{A} \}$ la variation totale faible de μ.

Définition 2-1-4

Une mesure μ à valeurs dans L est dite à variations (totales) fortement bornées si la mesure ν_x est bornée pour tout x de H. Elle est dite à variations totales fortement σ-bornées si il existe une suite croissante $\{\Omega_N,\ N \in \mathbb{N}\}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ convergeant vers Ω telle que $\forall N \in \mathbb{N}\ \mu_N(.) = \mu(. \cap \Omega_N)$ soit de variations fortement bornées. Elle est de variations totales fortement finies si la mesure ν_x est finie pour tout x de H.

Nous avons une définition analogue dans le cas de la topologie faible. Le cas de la topologie uniforme correspond à la définition 2-1-2. Il est donc possible d'effectuer deux nouvelles théories de l'intégration relativement à la topologie faible et à la topologie uniforme dans L. La notion d'intégration introduite dans [11], p. 891, correspond à notre définition relativement à la topologie faible.

Extension d'une mesure σ-additive à valeurs dans L d'une semi-algèbre de BOOLE à la σ-algèbre de BOOLE engendrée.

Soit Ω, un ensemble muni d'une semi-algèbre de BOOLE S qui engendre la σ-algèbre $\mathcal{A}$. La mesure est à valeurs dans L c'est-à-dire : $\forall S \in S\ \mu(S) \in L$. On suppose que la mesure est σ-additive. Pour cela, il faut préciser la topologie dans L. Nous considérerons la topologie faible. Ainsi pour toute suite $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ d'ensembles disjoints de S telle que la somme appartienne à S, nous avons :

$$\forall x, y \in H \qquad < \mu(\sum_{1}^{\infty} S_n)\ x,\ y > = \sum_{1}^{\infty} < \mu(S_n)\ x,\ y >$$

Proposition 2-1-7

Toute mesure définie sur S, bornée, faiblement σ-additive et à valeurs dans L, s'étend de façon unique à une mesure bornée faiblement σ-additive, à valeurs dans L sur la σ-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par S.

Démonstration :

$\forall x, y \in H$, la mesure complexe $<\mu(.)\, x, y>$ s'étend de façon unique à une mesure complexe $\mu_{x,y}(.)$ définie sur $\mathcal{A}$. Pour tout ensemble A de $\mathcal{A}$, la fonction $\mu_{.,.}(A)$ est linéaire en x, antilinéaire en y en raison du théorème d'unicité des extensions.

De plus, $\forall x, y \in H \qquad \forall S \in S \quad |<\mu(S)\, x, y>| \leqslant ||\mu(S)|| \, ||x|| \, ||y|| \leqslant K ||x|| \, ||y||$

pour un certain $K > 0$ par hypothèse. On en déduit que chacune des extensions satisfait $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mu_{x,y}(A) \mid \leqslant K ||x|| \, ||y||$. D'après le théorème 0-1-1, pour tout A de $\mathcal{A}$, la fonction $(x, y) \rightarrow \mu_{x,y}(A)$ détermine un opérateur $\bar{\mu}(A)$ tel que $<\bar{\mu}(A)\, x, y> = \mu_{x,y}(A)$.

L'opérateur $\bar{\mu}(.)$ est faiblement σ-additif et prolonge $\mu(.)$.

De plus $\bar{\mu}$ est borné par K en norme.■

Remarque :

Comme le dual topologique de L_2 est l'espace $\tilde{L}$ (chapitre 0-4), d'après le théorème de PETTIS (c.f. [15], th. 3-3) la mesure $\bar{\mu}$ est même fortement σ-additive.

Corollaire :

Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces probabilisables munis respectivement des mesures μ_1 et μ_2 à valeurs dans L, bornées et faiblement σ-additives. Il existe une mesure unique ν définie sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ à valeurs dans L, bornée et faiblement σ-additive et telle que $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 \; \nu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2)$.

Démonstration :

Pour la semi-algèbre S de BOOLE des rectangles mesurables de $\Omega_1 \times \Omega_2$, nous définissons la mesure μ^2 bornée, faiblement σ-additive à valeurs dans L par la formule $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 \; \mu^2(A_1 \times A_2) = \mu(A_1)\, \mu(A_2)$.

La σ-additivité sur S se démontre comme dans [30], p. 70. Ensuite nous appliquons le théorème.■

Proposition 2-1-8

Soit μ une mesure définie sur une semi-algèbre S de BOOLE et de variations uniformes bornées par une constante K, l'extension $\bar{\mu}$ de μ, mesure faiblement σ-additive sur la σ-algèbre B engendrée par S est de variations uniformes bornées par K.

Démonstration :

Par hypothèse, nous avons pour toute famille finie disjointe $\{S_i ; i = 1... n\}$ d'ensembles de S, $\sum_{i=1}^{n} || \mu (S_i) || \leqslant K$.

Cette propriété s'étend sans difficulté à l'algèbre de BOOLE $\mathcal{A}$ engendrée par S c'est-à-dire pour toute famille finie disjointe $\{A_i ; i = 1... n\}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$, $\sum_{i=1}^{n} || \mu (A_i) || \leqslant K$. Par conséquent, pour toute suite $\{x_1, y_1, x_2, y_2 ... x_n, y_n\}$ de vecteurs de H, nous avons $\sum_{i=1}^{n} | < \mu (A_i) x_i, y_i > | \leqslant K$.

Soit $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ une suite finie d'ensembles disjoints de B. Relativement aux vecteurs x_i, y_i, la mesure $< \mu (.) x_i, y_i >$ définie sur $\mathcal{A}$ approche son extension définie sur B au sens suivant : à chaque ensemble $B_i \in B$ correspond un ensemble B_i' de $\mathcal{A}_{\delta, \sigma}$ (cf. [30], p. 23, exercices 1-5-2) tel que $B_i' \subset B_i$ et $< \mu (B_i - B_i') x, y > = 0$.

En considérant successivement des suites $\{C_{i,k} ; k \in \mathbb{N}\}$ d'ensembles de $\mathcal{A}_\delta$ telles que $\forall i \lim_k \nearrow C_{i,k} = B_i'$ et des suites $\{D_{i,k,h} ; h \in \mathbb{N}\}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ telles que $\forall i, \forall k \lim_h \searrow D_{i,k,h} = C_{i,k}$, il vient que $\forall k \sum_{i=1}^{n} | < \mu (C_{i,k}) x_i, y_i > | \leqslant K$, que $\sum_{i=1}^{n} | < \mu (B_i') x_i, y_i > | \leqslant K$ et que $\sum_{i=1}^{n} || \mu (B_i) || < K$. ■

2-2 - Espérance conditionnelle

Dans ce paragraphe, l'espace de Hilbert est séparable, nous considérons en plus de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une sous σ-algèbre $\mathcal{A}_r$ de $\mathcal{A}$ et la restriction de la fonction de probabilité P de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}_r$ soit P_r.

Nous obtenons ainsi un second espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}_r, P_r)$.

Nous allons définir en premier lieu l'espérance conditionnelle des O.A.L. T_4 - intégrables.

Soit L (ω) un O.A.L. T_4 - intégrable et considérons la fonction d'ensemble $\mu (A) = \int_A L (\omega) \, d P (\omega)$ définie pour tout A de $\mathcal{A}$ et à valeurs dans L. D'après la proposition 1-5-9 c'est une fonction σ-additive d'ensemble pour la topologie forte. D'après la proposition 1-5-11 cette fonction σ-additive est, faiblement absolument continue par rapport à P.

Proposition 2-2-1

La mesure $\mu(.) = \int_{.} L(\omega)\, dP(\omega)$ où $L(\omega)$ est T_4 - intégrable est de variations finies.

Démonstration :

Soit $\{A_k\}$ une suite disjointe d'ensembles A_k de $\mathcal{A}$, telle que $\Sigma A_k = \Omega$
$\sum_k \| \mu(A_k) \| = \sum_k \| \int_{A_k} L(\omega)\, dP(\omega) \| \leqslant \sum_k \int_{A_k} \| L(\omega) \|\, dP(\omega)$
$= \int_\Omega \| L(\omega) \|\, dP(\omega) < \infty$.

Pour la fonction $\mu(.) = \int_{.} L(\omega)\, dP(\omega)$, nous avons établi les trois hypothèses du théorème 1-2. Si nous restreignons la fonction $\mu(.)$ aux ensembles de $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}$, les trois propriétés précédentes se conservent.

Appliquant le dit théorème, il existe un O.A.L. T_4 - intégrable, $\mathcal{A}_r$ - mesurable soit $E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))$, tel que pour tout ensemble A de $\mathcal{A}_r$:

$$\mu(A) = \int_A L(\omega)\, dP(\omega) = \int_A E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))\, dP(\omega) \blacksquare$$

Définition 2-2-1

Soit H un espace de Hilbert séparable, si $L(\omega)$ est un O.A.L. T_4 - intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)$ de $L(\omega)$ par rapport à la sous σ - algèbre $\mathcal{A}_r$ de $\mathcal{A}$ est l'unique (classe d'équivalence de) O.A.L. T_4 - intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}_r, P_{\mathcal{A}_r})$ telle que:

$$\forall A \in \mathcal{A}_r \qquad \int_A L(\omega)\, dP(\omega) = \int_A E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))\, dP_{\mathcal{A}_r}(\omega)$$

L'unicité s'obtient en observant que la différence de deux espérances conditionnelles éventuelles est d'intégrale nulle sur tout ensemble $A \in \mathcal{A}_r$ et en appliquant la proposition 1-5-8.

Enonçons quelques résultats techniques afin de pouvoir étudier le cas général des O.A.L. intégrables.

Proposition 2-2-2

Soit $L(\omega)$ T_4 - intégrable. Pour tout vecteur x et tout vecteur y de H:

$$< E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)) x, y > \underset{\text{p. s.}}{=} E^{\mathcal{A}_r}(< L(\omega) x, y >)$$

Démonstration :

Puisque $| < L(\omega)\, x,\, y > | \leqslant || L(\omega) ||\, ||\, x ||\, ||\, y ||$, la variable aléatoire $< L(\omega)\, x,\, y >$ est intégrable. Pour tout ensemble A de $\mathcal{A}_r$:

$$\int_A E^{\mathcal{A}_r}(< L(\omega)\, x,\, y >)\, d\, P(\omega) = \int_A < L(\omega)\, x,\, y > d\, P(\omega)$$

$$< \int_A E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)\, d\, P(\omega))x,\, y > = \int_A E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))\, x,\, y > d\, P(\omega)$$

Ainsi les deux variables aléatoires complexes.

$$E^{\mathcal{A}_r}(< L(\omega)\, x,\, y >) \qquad \text{et} \qquad < E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))x,\, y >$$

sont presque-sûrement égales.■

Proposition 2-2-3

Soit $L(\omega)$ T_4 - intégrable. Alors pour tout vecteur x de H:

$$|| E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)\, x)|| \underset{p.\,s.}{\leqslant} E^{\mathcal{A}_r}(|| L(\omega)\, x ||)$$

ainsi que $$|| E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))|| \underset{p.\,s.}{\leqslant} E^{\mathcal{A}_r}(|| L(\omega) ||)$$

Démonstration :

Pour tous vecteurs x, y de S:

$$| < E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))x,\, y > | \leqslant E^{\mathcal{A}_r}(| < L(\omega)\, x,\, y > |)$$

Prenons dans le second membre, la borne supérieure sur y,

$$| < E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))\, x,\, y > | \leqslant E^{\mathcal{A}_r}(\sup_y | < L(\omega)\, x,\, y > |)$$

Prenons maintenant la borne supérieure sur y dans le premier membre:

$$\sup_y | < E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))x,\, y > | \leqslant E^{\mathcal{A}_r}(\sup_y | < L(\omega)\, x,\, y > |)$$

Cette inégalité démontre la première partie de la proposition.

Sachant que $|| L(\omega) ||$ est intégrable, une démonstration semblable relative à x donne la seconde partie de la proposition.■

Soit, maintenant un O.A.L. intégrable L (ω). Introduisons les sous-ensembles Ω'_N de Ω, définis par $\{\omega;\ N - 1 \leqslant \| L(\omega) \| < N\}$. Déjà nous voyons que $\sum_{N=1}^{\infty} \Omega'_N = \Omega$. L'O.A.L. définie par $1_{\Omega'_N}(\omega) L(\omega)$ est de norme inférieure à N et par suite est T_4-intégrable. D'après les résultats antérieurs, il existe une fonction linéaire $\mathcal{A}_r$-mesurable soit $E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N}(\omega) L(\omega))$ tel que pour tout A de $\mathcal{A}_r$.

$$\int_{A \cap \Omega'_N} L(\omega)\, d P(\omega) = \int_A E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N}(\omega) L(\omega))\, d P(\omega)$$

Considérons alors la série $\sum_{N=1}^{\infty} E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N} L)$ dont chaque terme est défini presque partout comme un opérateur de *L*. Soit $R_{N_1, N_2} = \sum_{N_1 < N \leqslant N_2} E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N} L)$.

Pour tout vecteur $x \in H$, observons que:

$$\| R_{N_1, N_2} x \| \leqslant \sum_{N_1 < N \leqslant N_2} \| E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N} L x) \|$$

$$\leqslant \sum_{N_1 < N \leqslant N_2} E^{\mathcal{A}_r}(\| 1_{\Omega'_N} L x \|)$$

d'après la proposition 2-2-3. Par ailleurs pour tout $\omega \in \Omega$, $\| L x \| = \| \sum_1^{\infty} 1_{\Omega'_N} L x \| = \sum_1^{\infty} \| 1_{\Omega'_N} L x \|$.

Or par définition $L(\omega)$ est intégrable et pour tout vecteur x, $\| L(\omega) x \|$ est intégrable. Utilisons les propriétés de l'espérance conditionnelle de $\| L(\omega) x \|$ (cf. [30] page 115) :

$$E^{\mathcal{A}_r}(\| L(\omega) x \|) = \sum_{N=1}^{\infty} E^{\mathcal{A}_r}(\| 1_{\Omega'_N} L x \|) \underset{\text{p. s.}}{<} \infty$$

Regroupons les résultats antérieurs. La suite $\| R_{N_1, N_2} x \|$ tend vers zéro quand N_1 et N_2 tendent vers l'infini pour tout vecteur x de *H*, et presque tout ω de Ω. Grâce au critère de Cauchy pour la convergence forte presque-sûre, la somme de la série $\sum_{N=1}^{\infty} E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N} L)$ existe presque-sûrement comme opérateur de *L*.

Définition 2-2-2

Soit un O.A.L. intégrable L (ω). La somme de la série $\sum_{N=1}^{\infty} E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N}(\omega)\, L(\omega))$ est l'espérance conditionnelle de L (ω) par rapport à la sous σ-algèbre $\mathcal{A}_r$ de $\mathcal{A}$.

Remarque :

Cette espérance conditionnelle est unique considérée comme classe d'équivalence. Celà résulte des propriétés qui suivent.

Théorème 2-2-4

Pour tout vecteur x, y de H, pour tout O.A.L. L (ω) intégrable :

$$< E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))\, x,\ y > \ = \ E^{\mathcal{A}_r}(\, < L(\omega)\, x,\ y >)$$

Démonstration :

Pour chacune des variables $1_{\Omega'_N}(\omega)\, L(\omega)$, la proposition 2-2-2, nous indique que :

$$(< E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N} L)\, x,\ y >) = E^{\mathcal{A}_r}(< 1_{\Omega'_N} L\, x,\ y >)$$

Par passage à la limite forte presque sûre sur la série,

$$< \sum_{N=1}^{K} E^{\mathcal{A}_r}(1_{\Omega'_N} L)\, x,\ y > \ = \ E^{\mathcal{A}_r}(\, < \sum_{N=1}^{K} 1_{\Omega'_N} L\, x,\ y >)$$

nous obtenons le théorème.■

Corollaire :

Pour toute variable L (ω) intégrable, pour tout vecteur x de H :

$$|| E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)\, x) || \leqslant E^{\mathcal{A}_r}(\, || L(\omega)\, x ||)$$

Indiquons quelques autres propriétés de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{A}_r$ d'une variable L (ω) intégrable.

a) si $L(\omega) \underset{\text{p. s.}}{\geqslant} 0$ alors $E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)) \underset{\text{p. s.}}{\geqslant} 0$ où $L(\omega)$ est p. s. symétrique

si $L(\omega) \underset{\text{p. s.}}{=} 0$ alors $E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)) \underset{\text{p. s.}}{=} 0$

b) $E^{\mathcal{A}_r}(L_1(\omega) + L_2(\omega)) \underset{p.s.}{=} E^{\mathcal{A}_r}(L_1(\omega)) + E^{\mathcal{A}_r}(L_2(\omega))$

$E^{\mathcal{A}_r}(M\,L(\omega)) \underset{p.s.}{=} M\,E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))$ où M est un opérateur de L.

c) Si $L_n(\omega) \underset{f.p.s.}{\to} L(\omega)$ alors $E^{\mathcal{A}_r}(L_n(\omega)) \underset{f.p.s.}{\to} E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))$

d) Pour tout O.A.L. soit $M(\omega)$, $\mathcal{A}_r$ - mesurable, $E^{\mathcal{A}_r}(M(\omega)\,L(\omega)) \underset{p.s.}{=} M(\omega)\,E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))$.

e) $E^{\mathcal{A}_r}(L^*(\omega)) = (E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)))^*$

Démontrons les propriétés c et d.

Pour tout vecteur x de H.

$$\|[E^{\mathcal{A}_r}(L_n(\omega)) - E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega))]\,x\| = \|E^{\mathcal{A}_r}([L_n(\omega) - L(\omega)]\,x)\|$$

$$\leqslant E^{\mathcal{A}_r}[\,\|(L_n(\omega) - L(\omega))\,x\|\,]$$

Nous utilisons alors la propriété correspondante pour les variables aléatoires $\|(L_n(\omega) - L(\omega))\,x\|$ intégrables qui tendent presque-sûrement vers zéro.

Quant à la propriété d, nous savons déjà que pour toute fonction $M(\omega) = 1_A(\omega)$ où $A \in \mathcal{A}_r$:

$$E^{\mathcal{A}_r}(M(\omega)\,L(\omega)) \underset{p.s.}{=} M(\omega)\,E^{\mathcal{A}_r}(L(\omega)).$$

Pour toute combinaison linéaire finie, la propriété est vraie ainsi que pour toute limite forte de variables aléatoires opérateurs linéaires étagées.

2-3 - Fonctions aléatoires

Dans ce paragraphe, nous munissons L d'une topologie fixée qui peut être l'une des trois topologies T_1, T_2 ou T_4.

Définition 2-3-1

Etant donnés un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un intervalle T de la droite réelle achevée, on appelle fonction aléatoire à valeurs des opérateurs linéaires bornés (F.A.O.L.) sur T, une application $L(.,.)$ de $T \times \Omega$ dans L telle que, pour tout $t \in T$, la section $L(t,.)$ soit un O.A.L. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Chacune des fonctions $L(., \omega)$ définie sur T comme la section en ω de la FAOL ($\omega \in \Omega$) s'appelle une réalisation ou trajectoire de la FAOL. On note aussi la valeur en (t, ω) de la FAOL par $L_t(\omega)$.

Remarque :

Si $\{L_t(\omega), t \in T\}$ est une FAOL alors $\{|| L_t(\omega) ||, t \in T\}$ n'est pas nécessairement une fonction aléatoire réelle positive, la propriété reste vraie si H est séparable ou si la topologie est T_4 (théorème 1-2-4).

Définition 2-3-2

Une FAOL $L(t, \omega)$ est dite séparable si il existe une partie dénombrable S de T dite séparante et une partie négligeable N, telles que, si $\omega \notin N$, on ait pour tout $u \in T$.

$$L(u, \omega) \in \bigcap_{\{I;\ u \in I\}} \overline{L(I \cap S, \omega)}$$

Dans cette définition, I est un intervalle ouvert de T. La topologie de L intervient lorsque l'on prend l'adhérence de l'image par $L(., \omega)$ de l'ensemble $I \cap S$. Il convient donc de définir une séparabilité relativement à chacune des topologies définies sur L. On parle ainsi de FAOL faiblement, fortement ou uniformément séparable.

Critère de Séparabilité :

Une FAOL est séparable si il existe un ensemble négligeable N et un ensemble S dénombrable, tels que pour tout $\nu \in T$, il existe une suite $\{s_j;\ j \in \mathbb{N},\ s_j \in S\}$ dépendant de ω et de ν et telle que $\forall\ \omega \notin N$ $L(\nu, \omega) = \lim_j L(s_j, \omega)$.

Théorème 2-3-1

Soit H séparable et soit $L(t, \omega)$ une FAOL séparable. Pour tout ν de T, la fonction qui associe à ω, quand elle existe, la limite de $L(t, \omega)$ lorsque t tend vers ν, est mesurable. (Voir déf. 1-2-1).

Remarque :

Nous effectuerons la démonstration dans le cas le plus difficile, c'est-à-dire, pour la topologie faible. L'absence de relation d'ordre convenable dans l'espace L, ne permet pas d'étendre la démonstration valable pour les f. a. r. séparables. De plus, nous ne nous intéressons qu'aux éléments de L, par suite, la limite faible de $L(t, \omega)$ existe lorsque t tend vers ν, si et seulement si, pour tout x et tout y de H, $\lim_{t \to \nu} < L(t, \omega)\, x, y >$ existe et est majorée en module uniformément en x et y. Nous aurons besoin de trois lemmes pour obtenir le résultat final.

Lemme 1

Si la fonction $t \to L_t$ de T dans L tend faiblement vers une limite $M \in L$ quand t tend vers ν, alors il existe un ouvert du type $I_n =]\nu - \frac{1}{n}, \nu + \frac{1}{n}[$ avec $n \in \mathbb{N}$ et une constante K, tels que $\forall\, t \in I_n$ $|| L_t || \leqslant K$.

Démonstration :

Supposons que, quel que soit l'ouvert I voisinage de ν et quel que soit la constante K, il existe un t de I tel que $|| L_t || > K$. Considérons la suite $\{K_n = n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Nous pouvons trouver, d'après l'hypothèse de la démonstration, un élément s_n de $I_n =]\nu - \frac{1}{n}, \nu + \frac{1}{n}[$ tel que L_{s_n} soit de norme supérieure à n. Puisque S_n tend vers ν quand n tend vers l'infini, par hypothèse du lemme, la suite $\{L_{s_n}\}$ tend faiblement vers M. Elle est faiblement bornée et d'après les théorèmes 0-2-4 et 0-3-1, elle est uniformément bornée. Il y a donc contradiction.■

Lemme 2

Si H est séparable, l'ensemble $K_\nu = \bigcup_N \bigcup_n \bigcap_{t \in I(n)} \{\omega;\ || L_t(\omega) || \leqslant N\}$ où $I(n) =]\nu - \frac{1}{n}, \nu + \frac{1}{n}[$ est mesurable.

Démonstration :

Nous savons déjà que :

$$\bigcap_{t \in I(n)} \{\omega;\ || L_t(\omega) || \leqslant N\} \subset \bigcap_{s \in I(n) \cap S} \{\omega;\ || L_s(\omega) || \leqslant N\}$$

D'après la séparabilité de la FAOL, il existe un ensemble négligeable N tel que quelque soit $\omega \notin N$, quelque soit $t \in I(n)$ il existe une suite s_j de la partie séparante S, tendant vers t et tel que $L_{s_j} \xrightarrow[T_1]{} L_t$. Par conséquent si pour tout s de $I(n) \cap S$, nous avons $\forall\, x, y$ avec $|| x || = || y || = 1$ et $\forall\, t \in I(n)$:

$$| < L_s x, y > | \leqslant N \text{ alors } | < L_t x, y > | \leqslant N \text{ et } || L_t || \leqslant N$$

Regroupons les deux résultats : la différence

$$\bigcap_{s \in I(n) \cap S} \{\omega;\ || L_s(\omega) || \leqslant N\} - \bigcap_{t \in I(n)} \{\omega;\ || L_t(\omega) || \leqslant N\}$$

est négligeable. Le deuxième ensemble est mesurable ainsi que l'union sur n et sur N.■

Lemme 3

Si H est séparable, l'ensemble D où $T_1 = \lim_{\substack{s \to \nu \\ s \in S}} L_s(\omega)$ existe, est un sous-ensemble mesurable de K_ν.

Démonstration :

1°) $D \subset K_\nu$; en effet, d'après le premier lemme, si, pour $\omega \in \Omega$, la limite faible de $L_s(\omega)$ existe quand $s \in S$ tend vers ν, alors pour cet ω, il existe une constante K et un entier n, tels que, quelque soit $s \in]\nu - \frac{1}{n}; \nu + \frac{1}{n}[\cap S$, nous ayons $\| L_s(\omega) \| \leqslant K$.

Par conséquent $\omega \in D$ implique que $\omega \in K_\nu$. - 2°) Soit $\{x_h\}$ une suite dense dans H. Considérons deux vecteurs x_h et y_k fixés de cette suite. Si $\omega \in D$, alors la limite de $< L_s(\omega) x_h, x_k >$ existe. - 3°) Réciproquement supposons que ω appartienne à K_ν et soit tel que, pour tout x_h et tout x_k, la limite de $< L_s(\omega) x_h, x_k >$ existe quand s tend vers ν. Introduisons deux sous-suites $\{y_{h'}\}$ et $\{z_{k'}\}$ de $\{x_h\}$ ayant respectivement y et z deux vecteurs quelconques de H pour limite. La suite $\{z_{k'}\}$ est bornée et majorée par exemple par H.

Comme $\omega \in K_\nu$, il existe n et N tels que :

$$\forall s \in]\nu - \frac{1}{n}, \nu + \frac{1}{n}[= I_n, \quad \| L(s, \omega) \| \leqslant N$$

En approchant y par y_h et z par z_k, et par des majorations aisées, il vient, quelque soit $\omega \in K_\nu$, quand s et s' tendent vers ν, que $| < L_s(\omega) - L_{s'}(\omega) y, z > |$ tend vers zéro et la limite de $< L_s(\omega) y, z >$ existe quand s tend vers ν. - 4°) La fonction qui associe à ω, le nombre complexe $< L_s(\omega) y, z >$ est mesurable de Ω dans $\mathbb{C}$. Par suite, la fonction $\lim_{s \to \nu} < L_s(\omega) x_h, x_k >$ est mesurable de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit $M_{h,k}$, l'ensemble mesurable où cette fonction n'est pas définie. Pour $\omega \notin \bigcup_{h,k} M_{h,k}$ chacune des limites de $< L_s(\omega) x_h, x_k >$ existe et d'après le numéro 3, si de plus $\omega \in K_\nu$ alors la limite faible de $L(s, \omega)$ quand s tend vers ν, existe. ■

Démonstration du théorème :

Chacune des fonctions aléatoires complexes $\{< L(t, \omega) x, y >, t \in T\}$ est séparable relativement à une même partie séparante S et à un même ensemble négligeable N. Par conséquent d'après [30], page 82, Prop. 3-4-1.

$$\forall \omega \notin N \qquad \lim_{t \to \nu} < L_t(\omega) x, y > = \lim_{\substack{s \to \nu \\ s \in S}} < L_s(\omega) x, y >$$

L'existence d'un membre de l'égalité implique l'existence de l'autre. D'après le lemme 3, l'ensemble D où $\lim_{\substack{s \to \nu \\ s \in S}} < L_s(\omega)\, x, y >$ existe, est un sous-ensemble mesurable de K_ν.

Il est clair que si, par le théorème 1-1-1, le second membre définit, pour $\omega \in D$, l'opérateur $\lim_{\substack{s \to \nu \\ s \in S}} L_s(\omega)$ linéaire borné, alors pour $\omega \in D - N$, le premier membre définit de même un opérateur $\lim_{t \to \nu} L_t(\omega)$ linéaire borné. Comme pour tout x et tout y de *H*, l'application qui associe à $\omega \in D - N$ mesurable, le nombre complexe $< \lim_{t \to \nu} L_t(\omega)\, x, y > = \lim_{t \to \nu} < L_t(\omega)\, x, y > = \lim_{\substack{s \to \nu \\ s \in S}} < L_s(\omega)\, x, y >$ est mesurable, utilisant le théorème 1-2-1, l'application qui associe à ω de Ω, $\lim_{t \to \nu} L_t(\omega)$, est mesurable. ∎

2-4 - Martingales et suites centrées :

Dans ce paragraphe, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est fixé ainsi que l'espace de Hilbert *H* séparable. L'espace *L* des opérateurs linéaires bornés de *H* dans *H*, est muni de sa σ-algèbre *B*. Un paramètre t parcours un sous-ensemble T des entiers $\mathbb{N}$ ou un sous-ensemble T de $\mathbb{R}$. Ce paramètre t peut éventuellement prendre les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 2-4-1

Une F.A.O.L. symétrique fortement séparable soit $\{L_t,\ t \in T\}$ adaptée à la famille $\{\mathcal{A}_t\ t \in T\}$, est appelée une sous-martingale relativement à $\{\mathcal{A}_t ; t \in T\}$ si pour tout $t \in T$, L_t est intégrable et si pour tout couple $s \leqslant t$ dans T, on a $L_s \leqslant E^{\mathcal{A}_s}(L_t)$. Elle est appelée une martingale, si pour tout couple $s \leqslant t$ dans T, on a $L_s = E^{\mathcal{A}_s}(L_t)$. Elle est appelée une super-martingale, si $\{-L_t,\ t \in T\}$ est une sous-martingale.

Nota :

Pour une martingale, les opérateurs peuvent appartenir à *L*.

Proposition 2-4-1

Si $\{L_t,\ t \in T\}$ est une sous-martingale dans L_s alors pour tout x de *H*, $\{< L_t\, x, x >,\ t \in T\}$ est une sous-martingale de $\mathbb{R}$.

Démonstration :

La fonction aléatoire réelle $\{< L_t\ x,\ x >,\ t \in T\}$ est adaptée à la famille de σ-algèbres $\{\mathcal{A}_t,\ t \in T\}$. De plus comme pour tout couple $s \leqslant t$ de T, nous avons $L_s \leqslant E^{\mathcal{A}_s}(L_t)$ alors appliquant le théorème 2-2-4, nous déduisons :

$$< L_s\ x,\ x > \leqslant < E^{\mathcal{A}_s}(L_t))\ x,\ x > = E^{\mathcal{A}_s}(< L_t\ x,\ x >) \blacksquare$$

Par suite pour chaque valeur x de *H*, nous pourrons appliquer à $< L_t\ x,\ x >$, les résultats classiques sur les sous-martingales à valeurs réelles.

Proposition 2-4-2

Soit $\{L_t,\ t \in T\}$ une sous-martingale dans L_s. Pour le sous-ensemble T' de T où $|| L_t ||$ est intégrable, $\{|| L_t ||,\ t \in T'\}$ est une sous-martingale réelle.

Démonstration :

Soit $\{x_h\}$ une suite dense dans $S = \{x;\ || x || = 1\}$; $|| L_s || = \sup_h || L_s\ x_h ||$. Alors :

$$\forall x_q \qquad \forall s \leqslant + t \text{ de } T' \qquad < L_s\ x_h,\ x_h > \leqslant E^{\mathcal{A}_s}(< L_t\ x_h,\ x_h >)$$

$$\leqslant E^{\mathcal{A}_s}(|| L_t ||) \underset{\text{p. s.}}{<} \infty \blacksquare$$

Définition 2-4-2

Etant donnée une suite croissante, $\{\mathcal{A}_n,\ n \geqslant 1\}$ de σ-algèbres dans l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une suite d'O.A.L. intégrables $\{L_n,\ n \geqslant 1\}$ adaptée à $\{\mathcal{A}_n,\ n \geqslant 1\}$ est dite centrée, si $E^{\mathcal{A}_{n-1}}(L_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $S_n = L_1 + L_2 \ldots + L_n$.

Théorème 2-4-3

Si $\{L_n,\ n \geqslant 1\}$ est une suite centrée d'O.A.L., la convergence pour tout $x \in H$ de la série $\sum_{n \geqslant 1} E(|| L_n\ x ||^2)$ implique l'existence de la limite de $S_n = \sum_{k=1}^{n} L_k$ au sens fort, presque sûr.

Lemme 1

Sous les hypothèses du théorème, $\lim_{n \to \infty} E(|| S_n x ||^2)$ est finie pour tout vecteur x de *H*.

Démonstration :

Par définition :

$$E\left(\left|\left|\sum_1^n L_k x\right|\right|^2\right) = E\left(\left\langle \sum_k L_k x, \sum_h L_h x \right\rangle\right)$$
$$= \sum_{\substack{k \\ h}} E(\langle L_k x, L_h x \rangle)$$

Soit $\{e_n\}$ une base orthonormale dans *H*. Nous obtenons :

$$E(\langle L_k x, L_h x \rangle) = \sum_n E(\langle L_k x, e_n \rangle \langle e_n; L_h x \rangle)$$

Si $k < h$ (ou si $k > h$) chacun des termes est nul puisque la suite L_m est centrée :

$$E(\langle L_k x, e_n \rangle \langle e_n, L_h x \rangle) = E(\langle L_k x, e_n \rangle E^{\mathcal{A}_k} \langle e_n, L_h x \rangle) = 0$$

Seuls restent les termes $h = k$.

$$E\left(\left|\left|\sum_{k=1}^n L_k x\right|\right|^2\right) = \sum_{k=1}^n E(\langle L_k x, L_k x \rangle)$$
$$= \sum_{k=1}^n E(|| L_k x ||^2)$$

Puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} E|| L_k x ||^2$ est convergente, $\lim_{n \to \infty} E|| S_n x ||^2$ existe et est finie. ∎

Lemme 2

Sous les hypothèses du théorème, $\lim_{n,\, m \to \infty} E|| (S_n - S_m) x ||^2 = 0$.

Démonstration :

Reprenant la définition de la norme d'un vecteur, il vient :

$$|| S_n x ||^2 - || S_m x ||^2 = || (S_n - S_m) x ||^2 + \langle S_m x, (S_n - S_m) x \rangle$$
$$+ \langle (S_n - S_m) x, S_m x \rangle$$

Prenons les espérances mathématiques des deux membres:

$$E\{ || S_n x ||^2\} - E\{ || S_m x ||^2\} = E\{ || (S_n - S_m) x ||^2\}$$

$$+ E\{ < \sum_1^m L_k x, \sum_{m+1}^n L_k x > \} + E\{ < \sum_{m+1}^m L_k x, \sum_1^n L_k x > \}$$

Chacune des deux dernières espérances mathématiques est nulle puisque la suite $\{L_n, n \geqslant 1\}$ est centrée,

$$E\{ ||(S_n - S_m) x ||^2\} = E\{ || S_n x ||^2\} - E\{ || S_m x ||^2\}$$

En raison du lemme 1, $\lim E || S_n x ||^2$ existe et est finie. Par suite $\lim_{n, m \to \infty} E || (S_n - S_m) x ||^2 = 0$.■

Lemme 3

Sous les hypothèses du théorème, $|| (S_j - S_m) x ||^2$ est une sous-martingale pour $j \geqslant m$.

Lemme 4

Si $|| (S_j - S_m) x ||^2$ est une sous-martingale pour $j \geqslant m$ et si $\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} E (|| (S_n - S_m) x ||^2) = 0$ alors $\lim_{n \to \infty} S_n$ existe au sens fort presque-sûr.

Démonstration:

Pour une sous-martingale réelle $\{X_j, j \in \mathbb{N}\}$, nous savons (cf. [9], page 314, théorème 3-2) que pour tout $\lambda > 0$, $\lambda P \{ \operatorname{Max}_{j \leqslant n} X_j (\omega) \geqslant \lambda \} \leqslant \int_\Omega X_n \, d P \leqslant E | X_n | P \{ \operatorname{Max}_{j \leqslant n} X_j (\omega) \geqslant \lambda \}$.

Appliquons ce résultat à la sous-martingale réelle $\{ || (S_j - S_m) x ||^2, j \geqslant m \}$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \epsilon P\{ \operatorname{Max}_{m \leqslant j \leqslant n} || (S_j - S_m) x ||^2 \geqslant \epsilon\} \leqslant E || (S_n - S_m) x ||^2$$

ou encore:

$$\forall \epsilon > 0 \quad P\{ \operatorname{Max}_{m \leqslant j \leqslant n} ||(S_j - S_m) x ||^2 \geqslant \epsilon \} \underset{m, n \to \infty}{\to} 0$$

Ecrivons d'une autre manière, l'évènement en question:

$$\{\omega;\ \max_{m \leqslant j \leqslant n} \| (S_j - S_m)\ x \|^2 \geqslant \epsilon\} = \bigcup_{m \leqslant j \leqslant n} \{\omega;\ \| (S_j - S_m)\ x \|^2 \geqslant \epsilon\}$$

$$\text{L'ensemble } N_\epsilon = \bigcap_m \bigcup_{j \geqslant m} \{\omega;\ \| (S_j - S_m)\ x \|^2 \geqslant \epsilon\}$$

est négligeable en raison du résultat antérieur. Il en est donc de même de :

$$N = \bigcup_p N_{\frac{1}{p}} = \bigcup_p \bigcap_m \bigcup_{j \geqslant m} \{\omega;\ \| (S_j - S_m)\ x \|^2 \geqslant \frac{1}{p}\}$$

comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables. Pour tout $\omega \in N^c = \bigcap_p \bigcup_m \bigcap_{j \geqslant m} \{\omega;\ \| (S_j - S_m)\ x \|^2 < \frac{1}{p}\}$ nous observons que, pour tout $p > 0$, il existe m (p) telle que, pour tout $j \geqslant m$ (p).

$$\| (S_j\ (\omega) - S_{m\ (p)}\ (\omega))\ x \|^2 < \frac{1}{p}$$

Pour $\omega \in N^c$, quand m et j tendent vers l'infini $\| (S_j\ (\omega) - S_m\ (\omega))\ x \|$ tend vers zéro.

Comme l'espace L_2 est semi-complet, il existe pour tout $\omega \in N^c$ un opérateur $S\ (\omega) \in L_2$ tel que $S_m\ (\omega) \underset{f.}{\to} S\ (\omega)$ c'est-à-dire $S_m \underset{f.p.s.}{\to} S$.■

L'ensemble de ces quatre lemmes démontre le théorème.■

Théorème 2-4-4

Si $\{L_n,\ n \geqslant 1\}$ est une suite centrée d'O.A.L. pour toute suite non décroissante $\{u_n,\ n \geqslant 1\}$ de réels tendant vers l'infini, la convergence pour tout vecteur x de H de la série $\sum_{n=1}^{n} \frac{E \| L_n\ x \|^2}{u_n^2}$ implique la convergence au sens fort, presque-sûr de la suite $\frac{\sum_{k=1}^{n} L_k}{u_n}$ vers zéro.

Lemme :

Si $\{u_n,\ n \geqslant 1\}$ est une suite non décroissante de réels positifs tendant vers l'infini et si la suite d'opérateurs linéaires $\{L_n,\ n \geqslant 1\}$ est telle que la limite forte de $\sum^{\infty} \frac{L_n}{u_n}$ existe et est finie alors la limite forte de $\frac{\sum_{m=1}^{n} L_m}{u_n}$ est zéro.

Démonstration :

Introduisons $v_1 = u_1$ et $\forall n \geqslant 1\ v_n = u_n - u_{n-1}$ qui forme une suite de nombres non négatifs $\sum_1^n v_m = u_n \to \infty$. La suite $Z_n = \sum_{m=1}^n \frac{L_m}{u_m}$ converge fortement. Observons que :

$$\sum_{m=1}^n L_m = \sum_{m=1}^n u_m (Z_m - Z_{m-1}) = \sum_{m=1}^n v_m (Z_n - Z_{m-1})$$

Après avoir pris la valeur sur le vecteur x, passons à la norme dans H :

$$\| \sum_1^n L_m x \| \leqslant v_m \sum_1^p \| (Z_n - Z_{m-1}) x \| + \sum_{p+1}^n v_m \| (Z_n - Z_{m-1}) x \|$$

Majorons le second terme.

$$\sum_{p+1}^n v_m \| (Z_n - Z_{m-1}) x \| \leqslant (\sum_{p+1}^n v_m) \sup_{p < m \leqslant n} \| (Z_n - Z_{m-1}) x \|$$

Divisons les deux membres de l'inégalité par u_n :

$$\| \frac{\sum_1^n L_m x}{u_n} \| \leqslant \frac{\sum_1^p v_m \| (Z_n - Z_{m-1}) x \|}{u_n}$$

$$+ \frac{\sum_{p+1}^n v_m}{u_n} \sup_{p < m \leqslant n} \| (Z_n - Z_{m-1}) x \|$$

Faisons tendre n et ensuite p vers l'infini pour montrer que le premier membre tend vers zéro.■

Démonstration du théorème :

Pour $u_n \neq 0$, $\{ u_n^{-1} L_n,\ n \geqslant 1 \}$ est une suite centrée. La série $\sum_{n \geqslant 1} E(\| \frac{L_n x}{u_x} \|^2)$ converge par hypothèse En raison du théorème antérieur, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{L_n}{u_n}$ converge au sens fort presque-sûr. Pour tout $\omega \in N^c$ où N est négligeable, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{L_n(\omega)}{u_n}$ converge fortement. Le lemme termine la démonstration.■

■

CHAPITRE 3

FAMILLES SPECTRALES ALEATOIRES

Nous nous proposons par les paragraphes 1, 2, 3 d'introduire des Probabilités dans l'espace des opérateurs linéaires symétriques bornés L_s sous-ensemble de L, qui jouissent de la propriété d'invariance décrite ci-après. Dans l'espace L_s, les topologies faibles, fortes et uniformes ainsi que la σ-algèbre $B \cap L_s = B_s$ sont induites par celles correspondantes de L. Pour tout opérateur U unitaire de L et pour tout ensemble mesurable B de L, une mesure μ est dite intrinsèquement invariante si $\mu(B) = \mu(U^{-1} B U)$ où $U^{-1} B U = \{L; U L U^{-1} \epsilon B\}$.

Le résultat fondamental est la caractérisation des probabilités qui jouissent de la propriété d'invariance. Dans le cas plus particulier où la probabilité P est telle que, relativement à cette probabilité, les variables aléatoires $L_{i,j} = < L e_i, e_j >$ sont indépendantes, la propriété d'indépendance détermine de façon unique la probabilité : il existe comme nous le démontrerons, une famille de probabilités uniquement additives dites normales qui soient invariantes et telles que les v. a. $L_{i,j}$ soient indépendantes.

La méthode consiste à observer que l'espace L est un espace vectoriel et que la σ-algèbre B est presque une σ-algèbre produit $\otimes$. Une Probabilité sur B est déterminée par les probabilités marginales. Pour chaque marginale, il est possible d'introduire sa fonction caractéristique. Si nous considérons la restriction de P aux sphères $S^*_N = \{L; \| L \| \leqslant N\}$, les fonctions caractéristiques marginales sont de plus C^∞.

Dans le paragraphe 4, nous nous limitons au sous espace L_c des opérateurs symétriques et compacts de L. Dans ce cas, la famille spectrale d'un opérateur L compact est caractérisée par la suite des valeurs propres de L. La σ-algèbre B_c induite dans L_c par la σ-algèbre B de L est isomorphe à une sous σ-algèbre d'un espace produit qui sera précisé.

Finalement dans le paragraphe 5, nous considérons le cas particulièrement simple où l'opérateur aléatoire linéaire L (ω) est presque sûrement dans une sous *-algèbre $\mathbb{B}$ de BANACH commutative de L. Nous obtenons la représentation $L(\omega) \underset{p.s.}{=} \int_{\wedge} f(\lambda, \omega)\, d E_\lambda$ où $\wedge$ est l'espace de GUELFAND de $\mathbb{B}$, E_λ une famille spectrale et f (λ, ω) un processus aléatoire défini sur $\wedge$ et p.s à trajectoires continues.

3-1 - Fonctions caractéristiques marginales

Précisons en premier lieu la notion d'isomorphisme entre semi-algèbre de BOOLE. Soient Σ et Σ' deux ensembles munis respectivement de deux σ -algèbres de BOOLE B et B' engendrées respectivement par deux semi-algèbres de BOOLE S et S'. Nous supposons donnée une probabilité P sur Σ' ainsi qu'une application T de B' dans B. Le problème consiste à déterminer certaines conditions suffisantes sur T pour que la probabilité P définie sur B' induise une probabilité sur B. Soient D et D' deux ensembles de parties de Σ et de Σ' respectivement.

Définition 3-1-1

Une transformation T définie sur D' et à valeurs dans D est un isomorphisme (un σ -isomorphisme) si T est bijective et si T respecte les opérations (en nombre dénombrable) d'ensembles de D'.

Ainsi :

α) $\forall A' \in D'$ tel que $A'^{C} \in D'$ alors $T(A'^{C}) = (T(A'))^{C}$

β) $\forall A', B' \in D'$ tels que $A' \cap B' \in D'$ alors $T(A' \cap B') = T(A') \cap T(B')$

γ) $\forall A', B' \in D'$ tels que $A' \cup B' \in D'$ alors $T(A' \cup B') = T(A') \cup T(B')$

Dans le cas d'un σ -isomorphisme, nous aurons de plus par exemple $A'_n \in D'$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tels que $\bigcap_n A'_n \in D'$ alors $T(\bigcap_n A'_n) = \bigcap_n T(A'_n)$

Lemme :

Soient S et S' deux semi-algèbres définies sur Σ et Σ' et qui engendrent les deux algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$. Alors tout isomorphisme (σ -isomorphisme) T de S' sur S se prolonge de façon unique à un isomorphisme (σ -isomorphisme) $\hat{T}$ de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$.

Démonstration :

La famille des sommes finies d'ensembles de S' est précisément l'algèbre $\mathcal{A}'$ c'est-à-dire tout ensemble A' de $\mathcal{A}'$ est de la forme $A' = \sum_K S'_k$ où K est un ensemble fini d'indices. Par définition, posons $\hat{T}(A') = \sum_K T(S'_k)$. Cette définition est licite : soit $A' = \sum_H \bar{S}'_h$ une nouvelle décomposition possible de A'. Par suite pour tout $k \in K$, nous avons : $S'_k = \sum_H S'_k \cap \bar{S}'_h$ et par conséquent $\sum_K T(S'_k) = \sum_K T(\sum_H (S'_k \cap \bar{S}'_h)) = \sum_K \sum_H T(S'_k \cap \bar{S}'_h) = \sum_H T(\sum_K S'_k \cap \bar{S}'_h) = \sum_H T(\bar{S}'_h)$. Ainsi la définition de $\hat{T}$ ne dépend pas de la décomposition particulière choisie pour A'.

On démontre aisément que $\hat{T}$ respecte les opérations de complémentations, d'unions finies (dénombrables), d'intersections finies (dénombrables).

L'application $\hat{T}$ est injective : Soient A'_1 et A'_2 deux ensembles distincts de $\mathcal{A}'$ c'est-à-dire $A'_1 \triangle A'_2 \neq \emptyset$ où $\triangle$ représente l'opération de différence symétrique. Par suite $A'_1 \triangle A'_2 = \sum_K S'_k$ avec $S'_k \in S$ et $\exists\, k,\ S'_k \neq \emptyset$, puisque $\mathcal{A}'$ est une algèbre et $\hat{T}(A'_1 \triangle A'_2) = \sum_K T(S'_k)$ puisque T est injective sur S' et que $T(\emptyset) = T(\emptyset + \emptyset) = T(\emptyset) + T(\emptyset) = \emptyset$.

L'application $\hat{T}$ est surjective : tout ensemble A de $\mathcal{A}$ est de la forme $A = \sum_K S_k$ et pour tout $k \in K$, il existe S'_k de S' tel que $T(S'_k) = S_k$ et par conséquent le transformé par $\hat{T}$ de $\sum_K S'_k$ élément de $\mathcal{A}'$ est précisément A de $\mathcal{A}$.

Théorème 3-1-1 :

Soient S et S' deux semi-algèbres de BOOLE définies respectivement sur Σ et Σ' et qui engendrent B et B' σ-algèbres de BOOLE. Soit P' une probabilité sur S', σ-additive et soit T un σ-isomorphisme de S' sur S. Alors il existe une probabilité unique P sur B telle que $\forall S \in S\ P(S) = P'(T^{-1}(S))$.

Démonstration du théorème :

Considérons à priori la fonction P définie sur les ensembles de S par la formule $S \in S\ P(S) = P'(T^{-1}(S))$. C'est une fonction de S dans $[0,1]$ et $P(\Omega) = P'(T^{-1}(\Omega')) = 1$ d'après $T(\Omega') = T(\emptyset^c) = (T(\emptyset))^c = \emptyset^c = \Omega$.

La fonction P est additive sur S : Soit $S = S_1 + S_2$ avec $S, S_1, S_2 \in S$, nous avons $P(S_1 + S_2) = P'(T^{-1}(S_1 + S_2)) = P'(T^{-1}(S_1) + T^{-1}(S_2)) = P'(T^{-1}(S_1)) + P'(T^{-1}(S_2)) = P(S_1) + P(S_2)$.

Comme l'application T est σ-additive, la probabilité P est aussi σ-additive : Soit $S = \sum_1^\infty S_k$ avec $\forall k \in \mathbb{N}\ S_k \in S$ et $S \in S$, nous avons $P(S) = P'(T^{-1}(\sum_1^\infty S_k)) = P'(\sum_1^\infty T^{-1}(S_k)) = \sum_1^\infty P'(T^{-1}(S_k)) = \sum_1^\infty P(S_k)$.

Nota:

Le passage nécessitant le σ-isomorphisme de T est le suivant: $T^{-1}(\sum_1^\infty S_k) = \sum_1^\infty T^{-1}(S_k)$). L'application T étant un isomorphisme, l'application T^{-1} est définie et est un isomorphisme. De plus si T est un σ-isomorphisme, soit $\forall k \epsilon \mathbb{N}\, S'_k = T^{-1}(S_k)$, alors $\sum_{k=1}^\infty T(S'_k) = T(\sum_{k=1}^\infty S'_k)$ et $T^{-1}(\sum_{k=1}^\infty S_k) = T^{-1}(\sum_{k=1}^\infty T(T^{-1}(S_k))) = T^{-1}(T(\sum_{k=1}^\infty T^{-1}(S_k))) = \sum_{k=1}^\infty T^{-1}(S_k)$ c'est-à-dire T^{-1} est un σ-isomorphisme.

La fonction P est ainsi une probabilité σ-additive sur S et s'étend de façon unique à l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par S d'après le lemme et à la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ (cf. [30] p. 25 prop. 1-6-1). Dans ces conditions il est clair que P est l'unique probabilité définie sur B et jouissant de la propriété $\forall S \epsilon S\, P(S) = P'(T^{-1}(S))$.■

Soit L, l'espace des opérateurs linéaires bornés sur un espace de HILBERT H de base $\{e_i; i \epsilon I\}$. Comme dans le chapitre 1 § 1, nous pouvons considérer L comme un sous-ensemble de $M = \pi_{(i,j)\epsilon I\times I} \mathbb{C}_{i,j}$ où $\mathbb{C}_{i,j}$ est une réplique de l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes. Chaque ensemble $\mathbb{C}_{i,j}$ est muni de sa σ-algèbre $C_{i,j}$ des boréliens et pour un ensemble K fini d'indices (i, j) nous définissons la σ-algèbre produit $B_K = \bigotimes_K C_{i,j}$ de $\pi_K \mathbb{C}_{i,j}$. Cette σ-algèbre est σ-isomorphe à la σ-algèbre des cylindres $A = A_K \pi_{(i,j)\epsilon K^c} \mathbb{C}_{i,j}$ où A_K, base du cylindre, appartient à B_K. L'ensemble des cylindres de M à base mesurable relativement à B_K pour un ensemble fini K convenable d'indices, est une semi-algèbre de BOOLE S' qui engendre $\bigotimes_{I\times I} C_{i,j}$. L'ensemble $\{A \cap L; A \epsilon S'\}$ est une semi-algèbre de L qui engendre précisément B (Th. 1-1-3). L'application T qui à A de S' associe $A \cap L$ de S est un isomorphisme de semi-algèbre de BOOLE comme on le vérifie aisément. Si $B \epsilon S$, il existe A de S' tel que $B = T(A)$ et la base de B est par définition la base A_K de A. Les ensembles de S sont déterminés par leur base.

A toute probabilité P' sur $\bigotimes_{I\times I} C_{i,j}$ nous pouvons associer une famille de probabilités marginales compatibles par la formule $P_K(A_K) = P'(A)$ où $A \epsilon S$, A_K est la base de A et K est la famille convenable et finie d'indices. Réciproquement, chacun des espaces $\mathbb{C}_{i,j}$ étant métrique complet de type dénombrable, à toute famille $\{P_K$; K sous-ensemble fini de $I\times I\}$ de probabilités marginales compatibles (cf. [30] p. 79 corollaire), il existe une probabilité unique P' définie sur $\bigotimes_{I\times I} C_{i,j}$ de probabilités marginales P_K.

Corollaire 3-1-1

A toute probabilité P sur L correspond une famille $\{P_K ; K \subset I \times I, K$ fini$\}$ de probabilités marginales compatibles. A toute famille $\{P_K ; K \subset I \times I, K$ fini$\}$ de probabilités marginales compatibles, il existe au plus une probabilité P sur L ayant cette famille comme famille de probabilités marginales.

Démonstration :

Pour K fixé, la restriction de P aux ensembles $\{L; L \in L \underset{K}{\pi} L_{i,j} \in A_K \; A_K \in B_K\}$ est une probabilité P_K de $\underset{K}{\pi} \mathbb{C}_{i,j}$ et les probabilités P_K sont compatibles par construction.

Réciproquement : soit P_K une famille de probabilités marginales compatibles. Il existe une probabilité unique P' de $\underset{I \times I}{\pi} \mathbb{C}_{i,j}$ ayant ces probabilités pour probabilités marginales. D'après le théorème 1, la fonction $B \in S \; P(B) = P'(T^{-1}(A)) \in [0,1]$ où A est le cylindre de S' ayant la même base que B, est une probabilité additive. Si de plus, elle est σ-additive alors elle s'étend de façon unique à B et est l'unique probabilité sur B ayant comme probabilité marginale P_K dans $B_K, \forall K$. ■

Dorénavant nous supposons que H est séparable, nous allons considérer les ensembles d'indices $K_n = \{(i,j); i \leqslant n$ et $j \leqslant n\}$. Tout ensemble K fini d'indices est pour n_o suffisamment grand un sous-ensemble de K_{n_o}. Pour toute famille P_K de probabilités marginales compatibles, la famille P_{K_n} est compatible et réciproquement, quelquesoit $\{P_{K_n}, n \geqslant 1\}$ une famille de probabilités marginales compatibles, nous définissons d'une façon unique grâce à la compatibilité, P_K égale à la restriction de $P_{K_{n_o}}$ aux cylindres de $B_K = \underset{i,j \in K}{\otimes} \mathbb{C}_{i,j}$ pour tout n_o tel que $K \subset K_{n_o}$. Les probabilités marginales P_K sont compatibles. Pour simplifier les notations dorénavant $P_{K_n} = P^n$.

Précisons les σ-algèbres qui interviennent pour définir les probabilités marginales P^n. Introduisons l'espace L_n des matrices n x n à cœfficients complexes muni de la σ-algèbre B_n des boréliens. La notation se justifie puisque lorsque l'espace de HILBERT H est de dimension n, soit H_n alors l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H_n est isomorphe à L_n et la σ-algèbre B introduite au chapitre 1 est isomorphe à B_n. Nous identifierons dorénavant les ensembles $\underset{K_n}{\pi} \mathbb{C}_{i,j}$ et L_n ainsi que les σ-algèbres $\underset{K_n}{\otimes} \mathbb{C}_{i,j}$ et B_n. Par ailleurs, à tout élément L_n de L_n nous pouvons associer de façon biunivoque les ensembles :

$$\{L; L \in L, L_{i,j} = (L_n)_{i,j} \text{ pour } i,j \leqslant n\} \text{ et } \{M; M \in M, M_{i,j} = (L_n)_{i,j} \text{ pour } i,j \leqslant n\}$$

Par suite L_n peut être considéré comme le cylindre de L à base $\underset{K_n}{\pi} \mathbb{C}_{i,j}$. La σ-algèbre B_n devient alors la sous σ-algèbre de B des cylindres $\{L; L \in L, \underset{K_n}{\pi} L_{i,j} \in A_n, A_n \in B_n\}$ à base A_n dans $\underset{K_n}{\pi} C_{i,j}$. De la même façon L_n peut être considéré comme un cylindre de M et B_n comme une sous σ-algèbre de $\underset{I \times I}{\otimes} C_{i,j}$. Les probabilités marginales sont définies dans l'un de ces espaces probabilisables σ-isomorphes soit par exemple (L_n, B_n).

Enonçons le résultat obtenu

Proposition 3-1-2

Soit H séparable, quelquesoit la famille P^n de probabilités marginales, compatibles il existe au plus une probabilité P sur (L, B) qui prolonge chacune des probabilités P^n et réciproquement.

Soient u,v deux matrices infinies de cœfficients $u_{j,k}$, $v_{j,k}$ réels $j, k \in \mathbb{N}$. Pour toute probabilité P^n définie sur les boréliens de L_n, nous pouvons définir la fonction caractéristique marginale :

$$\varphi_n (u, v) = E_n (\exp i \sum_{j,\, k \leqslant n} (u_{j,\,k} M_{j,\,k} + v_{j,\,k} N_{j,\,k}))$$

Introduisons $\rho_n (L) = \sum_{j,k \leqslant n} (u_{j,k} M_{j,k} + v_{j,k} N_{j,k})$. Dans ces conditions $\varphi_n (u, v) = E_n (\exp i\rho (L))$. Le symbole E_n correspond à une espérance mathématique relative à P^n. Dans l'expression, $j = 1 \ldots n$, $k = 1 \ldots n$, $L_{j,k} = M_{j,k} + i N_{j,k}$. Comme l'espace L_n est isomorphe à l'espace $\underset{t\,=\,1 \ldots 2n^2}{\pi} \mathbb{R}_t$, nous pouvons utiliser le théorème d'unicité entre les fonctions de distribution et leurs fonctions caractéristiques. Par suite la relation entre P^n et φ_n est bijective.

Si P^n est la restriction de P^{n+m} où $m \geqslant 0$ à la sous σ-algèbre B_n de B_{n+m} des boréliens de L_{n+m}, les fonctions caractéristiques marginales φ_n et φ_{n+m} vérifient la relation:

$$\varphi_n (u_{j,\,k}, v_{j,\,k}) = \varphi_{n+m} (u'_{j,\,k}, v'_{j,\,k}) \text{ où } u'_{j,\,k} = u_{j,\,k} \text{ et } v'_{j,\,k} = v_{j,\,k}$$

si $j \leqslant n$ et $k \leqslant n$ et $u'_{j,\,k} = 0$ et $v'_{j,\,k} = 0$ si $j > n$ où $k > n$.

Définition 3-1-2

Les fonctions caractéristiques marginales φ_n sont compatibles si pour tout $n > 0$ et pour tout $m \geqslant 0$, la relation antérieure est vérifiée.

Proposition 3-1-3

Les Probabilités marginales sont compatibles si et seulement si les fonctions caractéristiques le sont.

Nous effectuons la démonstration uniquement dans le cas où H est séparable. En raison de ce qui précède, il suffit de vérifier la réciproque. Comme φ_n et φ_{n+m} sont deux fonctions caractéristiques, il existe P^n et P^{n+m} deux probabilités définies respectivement sur B_n et B_{n+m}. La restriction de P^{n+m} à B_n est une probabilité P'^n dont la fonction caractéristique φ'_n est telle que :

$$\varphi'_n(u_{j,k}, v_{j,k}) = \varphi_{n+m}(u'_{j,k}, v'_{j,k}) \quad \text{où}$$

$$u'_{j,k} = \begin{cases} u_{j,k} & j, k \leqslant n \\ 0 & j \text{ ou } k > n. \end{cases}$$

$$v'_{j,k} = \begin{cases} v_{j,k} & j, k \leqslant n. \\ 0 & j \text{ ou } k > n. \end{cases}$$

Par suite $\varphi'_n(u_{j,k}, v_{j,k}) = \varphi_n(u_{j,k}, v_{j,k})$ et en raison de l'unicité $P'^n = P^n$. ■

Corollaire d'unicité : Une probabilité P de L est déterminée de façon unique par sa famille de fonctions caractéristiques marginales, compatibles.

L'espace L s'obtient comme limite croissante des sphères $S^*_N = \{L; \| L \| \leqslant N\}$ mesurables c'est à dire $L = \bigcup_N S^*_N$ et $S^*_N \subset S^*_{N+1}$, où N = 1, 2 ... La probabilité P induit sur chaque sous-ensemble S^*_N une mesure P_N positive et majorée par P. Nous pouvons définir pour tout n, les sphères $S^*_{n,N} = \{L; \| L \| \leqslant N, L \in L_n\}$ et $L_n = \bigcup_N S^*_{n,N}$. De même, la mesure marginale P^n_N de la mesure P_N est positive et majorée par P^n sur $S^*_{n,N}$:

Proposition 3-1-4

Soit H séparable, les mesures positives et majorées P^n_N convergent faiblement vers la probabilité marginale P^n lorsque N tend vers l'infini.

Démonstration :

Soit f une fonction continue et bornée de L_n dans $\mathbb{R}$. La fonction f est mesurable de (L_n, B_n) dans $(\mathbb{R}, R)$ et intégrable par rapport à toutes les mesures bornées définies dans (L_n, B_n). De plus si L est un opérateur quelconque de L_n, nous avons :

$$\left| \int_{L_n} f(L)\, d\, P^n(L) - \int_{L_n} f(L)\, d\, P^n_N(L) \right| \leqslant \left| \int_{S^*_{n,N}{}^c} f(L)\, d\, P^n(L) \right|$$

Comme $S^*_{n,N} \xrightarrow[N \to \infty]{} L_n$, la suite $S^{*c}_{n,N} \xrightarrow[N \to \infty]{} \emptyset$; mais P est une probabilité et $P(S^*_{n,N}) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. Tenant compte de l'intégrabilité de la fonction f, l'expression :

$$\left| \int_{S^{*c}_{n,N}} f(L)\, d\, P^n\ (L) \right| \to 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{N \to \infty} \int_{L_n} f(L)\ d\ P^n_N\ (L) = \int_{L_n} f(L)\ d\ P^n\ (L)\ \blacksquare$$

En particulier les parties réelles et imaginaires de $\exp\left(i \sum_{K_n} (u_{j,k}\ M_{j,k} + v_{j,k}\ N_{j,k})\right)$ sont continues et bornées, par suite $\varphi_{n,N}\ (u_{j,k}, v_{j,k})$ converge simplement vers $\varphi_n\ (u_{j,k}, v_{j,k})$.

Proposition 3-1-5

Soit *H* séparable, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $N \geqslant 1$, la mesure P^n_N a des moments finis de tous ordres et la fonction caractéristique marginale $\varphi_{n,N}$ est de classe C^∞.

Démonstration :

Il suffit de montrer que tous les moments $\int_{L_n} M^r_{j,k}\ d\ P^n_N$ et $\int_{L_n} N^r_{j,k}\ d\ P^n_N$, $r \in \mathbb{N}$ existent pour que les moments mixtes existent, en raison de l'inégalité de Schwarz. Les propriétés de P^n_N se traduisent par exemple sur $M_{j,k}$ en :

$$\int_{L_n} M^r_{j,k}\ d\ P^n_N = \int_{S^*_{n,N}} M^r_{j,k}\ d\ P^n_N$$

La mesure P^n est bornée et dans l'ensemble $S^*_{n,N} = \{L;\ ||L|| \leqslant N$ et $L \in L_n\}$, la fonction $M^r_{j,k}$ est majorée par N^r en raison des inégalités : $|M^r_{j,k}| \leqslant |L_{j,k}|^r \leqslant ||L||^r \leqslant N^r$. Cette fonction est par suite d'intégrale finie.

Terminons la démonstration en rappelant que si une mesure bornée possède des moments de tous les ordres alors sa fonction caractéristique est de classe C^∞.■

Nota :

Plus précisément, nous avons :

$$\frac{\partial \varphi_{n,N}(u, v)}{\partial u_{j,k}} = i \int_{L_n} M_{j,k} \exp\{i\ \rho_n\ (L)\}\, d\ P^n_N\ (L)$$

$$\frac{\partial \varphi_{n,N}(u, v)}{\partial v_{j,k}} = i \int_{L_n} N_{j,k} \exp\{i\ \rho_n\ (L)\}\, d\ P^n_N\ (L)$$

L'espace L_s des opérateurs linéaires symétriques bornés intervient plus souvent que l'espace L dans les applications en Physique. Un opérateur L appartient à L_s si $L = L^*$ où encore $\forall j,k\ L_{j,k} = \overline{L}_{k,j}$. A l'aide des parties réelles et imaginaires de L, un tel opérateur appartient à L_s si :

$$\forall j,k\ M_{j,k} = M_{k,j}$$

$$N_{j,k} = -N_{k,j}$$

On déduit que $L_{j,j} = M_{j,j}$ et $N_{j,j} = 0$.

Toute mesure sur L_s est une meusre sur L telle que $P(L_s^c) = 0$ ou encore telle que:

$$P\{L; \exists j,k \text{ t q } M_{j,k} \neq M_{k,j} \text{ ou } N_{j,k} \neq -N_{k,j}\} = 0$$

Pour la mesure P définie sur L_s, il est possible d'introduire les probabilités marginales P^n de la Proposition 2. Soit $L_{s,n} = L_n \cap L_s$, alors P^n donne une probabilité zéro à l'ensemble A_n^c cylindre de base $L_{s,n}^c$. Réciproquement soit $\{P_n;\ n \geqslant 1\}$ une famille de probabilités marginales compatibles telle que $P^n(A_n^c) = 0$ pour tout n. Il existe une probabilité unique P définie sur L prolongeant chacune des probabilités P^n. D'après l'identification du théorème 1, nous avons $P(A_n \cap L) = P^n(A_n) = 1$. Par ailleurs $L_s = \bigcap_n (A_n \cap L)$ puisque tout opérateur L de L_s appartient à A_n quel que soit n et que réciproquement quels que soient j,k, L appartient à $A_n \cap L$ avec $n = \sup(j,k)$ et par suite $L_{j,k} = \overline{L}_{k,j}$.

Enonçons les résultats antérieurs.

Proposition 3-1-6

Soit H séparable, une probabilité P sur (L, B) induit sur L_s, $B_s = B_n \cap L_s$ une probabilité P' trace si et seulement si, pour tout $n > 0$, la probabilité marginale P^n du complémentaire de $L_{s,n}$ dans L_n est nulle. Si P possède la propriété antérieure, nous identifierons P et P' et dirons que P est définie sur L_s et de même que P^n est définie sur $L_{s,n}$.

Voyons comment se traduit cette propriété pour les fonctions caractéristiques marginales φ_n.

Proposition 3-1-7

Soit H séparable, une mesure μ positive bornée est telle que $\mu(L - L_s) = 0$ si et seulement si pour tout $n > 0$, la fonction caractéristique marginale φ_n ne dépend pas des variables $v_{j,j}$ pour $j \leqslant n$ et dépend des autres variables par les fonctions $u_{k,k}$, $u_{j,k} + u_{k,j}$ et $v_{j,k} - v_{k,j}$ pour $j < k \leqslant n$.

Démonstration :

Un opérateur L de L_n appartient à $L_{s,n}$ si et seulement si :

$$\forall\, j, k \leqslant n \qquad M_{j,k} = M_{k,j} \quad \text{et} \quad N_{j,k} = -N_{k,j}$$

Par suite si μ est une mesure sur L_s , nous pouvons transformer l'expression $\varphi_n(u,v)$ et il vient :

$$\varphi_n(u, v) = \int \exp i\Big\{ \sum_{j<k} (u_{j,k} + u_{k,j})\, M_{j,k} + \sum_{j<k} (v_{j,k} - v_{k,j})\, N_{j,k} + \sum_j u_{j,j}\, M_{j,j} \Big\}\, d\mu$$

Réciproquement : Soit φ_n la fonction caractéristique d'une mesure μ de la forme :

$$\varphi_n(u, v) = \psi_n(u_{j,k} + u_{k,j},\ v_{j,k} - v_{k,j}) \text{ pour } j \leqslant k$$

Introduisons d'abord la mesure Q_n correspondant à la fonction $\varphi_n(u, v)$ où $u_{j,k} = 0$ pour $j > k$ et $v_{j,k} = 0$ pour $j \geqslant k$, qui est une fonction caractéristique marginale. Ensuite introduisons une mesure μ'_n dans $L_{s,n}$ telle que sa marginale soit Q_n et telle que $L_{j,k} = \overline{L}_{k,j}$ pour $j,k \leqslant n$.

On peut utiliser [30] page 69 P 3-2-1 pour démontrer l'existence et l'unicité de μ'_n. La fonction caractéristique φ'_n de μ'_n s'écrit de la façon suivante par la directe :

$$\varphi'_n(u, v) = \psi'_n(u_{j,k} + u_{k,j},\ v_{j,k} - v_{k,j})$$

Pour $j > k$, posons $u_{j,k} = 0$ et pour $j \geqslant k$ posons $v_{j,k} = 0$, et dans ces conditions en tenant compte des propriétés de la mesure marginale Q_n :

$$\varphi'_n(u, v) = \psi'_n(u_{j,k},\ v_{j,k}) = \varphi_n(u, v)$$

$$= \psi_n(u_{j,k},\ v_{j,k}).$$

Les deux fonctions ψ_n et ψ'_n sont égales et par suite, il en est de même de φ_n et de φ'_n.

Comme la mesure est déterminée par sa fonction caractéristique $\mu_n = \mu'_n$ et μ_n est une mesure définie sur $L_{s,n}$.■

3-2 - Conditions nécessaires d'invariance

Définition 3-2-1

Dans tout ce paragraphe, H est séparable. Une mesure μ définie dans (L, B) est dite intrinsèquement invariante pour les transformations unitaires d'un groupe V si pour tout ensemble B de B et tout opérateur unitaire U de V, la mesure μ vérifie $\mu(B) = \mu(U^{-1} B U)$.

Une mesure μ est intrinséquement invariante si elle est constante sur les transformées $U^{-1} B U$ par les opérateurs unitaires U de V des ensembles mesurables B de B. Remarquons que l'opérateur L et son transformée $U^{-1} L U$ par U ont des normes égales; par suite, tout sous-ensemble mesurable de $S_N^* = \{L; \| L \| \leqslant N\}$ a une transformée par U, mesurable dans S_N^*. La restriction de μ intrinséquement invariante aux ensembles mesurables de S_N^* est encore une mesure intrinsequement invariante.

Soit une base orthonormale $e_1, e_2 \ldots e_n \ldots$ de l'espace H. Introduisons le sous groupe U_n des opérateurs unitaires laissant invariant les vecteurs e_k pour $k > n$. A tout opérateur U de U_n correspond un opérateur unitaire de L_n et réciproquement.

Lemme 3-2-1

Si une probabilité P est intrinséquement invariante par rapport à U quels que soient n,N la mesure P_N^n est intrinsèquement invariante par rapport aux opérateurs unitaires de U_n.

Démonstration :

Rappelons que P_N^n est la mesure marginale de P_N relative aux coordonnées $L_{j,k}$ pour $j \leqslant n$ et $k \leqslant n$, si P_N est la restriction de P aux sous-ensembles mesurables de S_N^*. Introduisons la projection P_n qui à $\sum_1^\infty c_k e_k$ associe $\sum_1^n c_k e_k$. Soit B un cylindre dont la base B_n appartient à B_n. Les operateurs U de U_n commutent avec les projecteurs P_n. En fait $P_n U = U P_n$ est une transformation unitaire disons U_n de L_n. Un opérateur L appartient à B si et seulement si $P_n L P_n$ appartient à B_n.

Il vient que $U^{-1} B U$ est un cylindre de base $U_n^{-1} B_n U_n$ borélien de L_n et finalement que :

$$P_N^n (U^{-1} B U) \overset{\text{déf.}}{=} P (U^{-1} B U \cap S_N^*) = P (U^{-1} (B \cap U S_N^* U^{-1}) U)$$

$$= P (B \cap U S_N^* U^{-1}) = P (B \cap S_N^*) \overset{\text{déf.}}{=} P_N^n (B) \blacksquare$$

Il est utile d'étudier séparément comment se transforme l'expression $\rho_n (L) = \sum_{j,k < n} (u_{j,k} M_{j,k} + v_{j,k} N_{j,k})$ de la fonction caractéristique $\varphi_n (u,v) = E (\exp i \rho_n (L))$ lorsque L est remplacé par $L' = U^{-1} LU$ où U est un opérateur unitaire quelconque. Pour simplifier l'écriture nous noterons u_n, v_n les matrices à cœfficients réels $u_{j,k}$ et $v_{j,k}$ pour $j,k \leqslant n$ et $u_{j,k} = v_{j,k} = o$ pour $j > n$ ou $k > n$.

Nous introduisons le produit doublement contracté de deux matrices A, B soit $A..B = \sum_{j,k} A_{j,k} B_{j,k}$. Dans le cas où l'une des matrices A ou B est carrée n x n le produit scalaire doublement contracté vaut $A..B = \sum_{j,k < n} A_{j,k} B_{j,k}$ ce qui revient à donner aux cœfficients non définis la valeur zéro.

Proposition 3-2-2

Soit U un opérateur unitaire. Pour tout $L = M + i N \in L$ si $\rho_n (L) = u_n .. M + v_n .. N$ alors $\rho_n (U^{-1} L U) = u' .. M + v' .. N$ où $u' + iv' = U (u_n + iv_n) U^{-1}$.

Nous noterons parfois la transformation sur les cœfficients $u_{j,k}$, $v_{j,k}$ de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = T (U) \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

Démonstration :

En introduisant $L' = U^{-1} LU = M' + iN'$, par définition $\rho_n (L') = u_n .. M' + v_n .. N'$.

Soient a et b, les parties réelles et imaginaires de U, il vient $U = a + i b$, $U^{-1} = \bar{U}^t = a^t - i b^t$ et nous obtenons $M' + iN' = (a^t - i b^t) (M + iN) (a + i b)$. Remarquons que pour toutes matrices carrées infinies R, S, X, Y, nous avons :

$$R .. X S Y^t = \sum_{i,j} R_{i,j} \sum_{k,l} X_{i,k} S_{k,l} Y_{j,l}$$

$$= \sum_{k,l} S_{k,l} \sum_{i,j} X_{i,k} R_{i,j} Y_{j,l} = S .. X^t R Y$$

dans le cas où les différentes sommes doubles existent. Comme nous avons :

$$M' = a^t M a + b^t M b + b^t N a - a^t N b$$

$$N' = a^t M b - b^t M a + b^t N b + a^t N a$$

il vient :

$$\rho(L') = M..\,[a\,u_n\,a^t + b\,u_n\,b^t + a\,v_n\,b^t - b\,v_n\,a^t]$$

$$+ N..\,[b\,u_n\,a^t - a\,u_n\,b^t + b\,v_n\,a^t + a\,v_n\,a^t]$$

Par identification avec $\rho(L') = u' .. M + v' .. N$, nous obtenons que $(u' + iv') = U\,(u_n + iv_n)\,\bar{U}^t$.■

Les théorèmes qui suivent, supposent qu'il existe une Probabilité qui soit intrinséquement invariante par rapport à un sous-groupe V de U et sous cette hypothèse, précisent les propriétés de la fonction caractéristique marginale $\varphi_{n,N}$.

Pour cette fonction caractéristique relative à l'espace L_n, nous considérons des sous-groupes différentiables à un paramètre $V = \{U(t) : t \in T\}$ de $U_n \subset U$. Les opérateurs unitaires de V laissent invariant les vecteurs e_i pour $i > n$.

Pour une transformation unitaire U de U_n observons que si $L' = U^{-1}\,L\,U$, nous avons :

$$L'_{i,j} = \langle L'\,e_j, e_i \rangle = \langle U^{-1}\,L\,U\,e_j, e_i \rangle = \sum_{k,l} \langle L\,e_k, e_l \rangle$$

$$\langle e_l, U\,e_i \rangle \langle U\,e_j, e_k \rangle$$

Ou encore :

$$L'_{i,j} = \sum_{k,l} U_{k,j}\,\bar{U}_{l,i}\,L_{l,k} \quad \text{avec rappelons-le } U_{i,j} = \langle U\,e_j, e_i \rangle$$

Dans l'expression de $\varphi_{n,N}$ n'intervient les $L_{i,j}$ que pour $i,j \leqslant n$. Nous savons de plus que :

$$U_{i,j} = 0 \qquad \text{pour } i \neq j \text{ et } i \text{ ou } j > n$$

$$U_{i,i} = 1 \qquad \text{pour } i > n$$

Par suite la sommation sur k et l au lieu d'aller de 1 à l'infini va uniquement de 1 à n.

$$\text{Pour } i, j \leqslant n,\ L'_{i,j} = \sum_{\substack{k \leqslant n \\ l \leqslant n}} U_{l,j}\ \bar{U}_{k,i}\ L_{k,l}$$

Il est possible de se limiter aux seules parties utiles des différents opérateurs L et U, c'est à dire à $L_n = P_n\,L\,P_n$ et à $U_n = P_n\,U\,P_n$ que nous pouvons identifier à des matrices carrées n x n agissant dans H_n.

Proposition 3-2-3

Si la mesure positive bornée μ est intrinséquement invariante par rapport à V sa fonction caractéristique φ_n marginale s'écrit pour tout U de V.

$$\varphi_n (u, v) = \int \exp i \, \rho_n (U^{-1} L U) \, d \, \mu (L) \qquad \text{où}$$

$$\rho_n (L) = \sum_{j,k=1}^{n} u_{j,k} M_{j,k} + v_{j,k} N_{j,k}$$

Démonstration :

$\varphi_n (u,v) = \int \exp i \, \rho_n (L) d \mu (L)$. Comme nous intégrons dans tous l'espace L et que l'application $L \to U^{-1} L U$ est un isomorphisme de L prenons $L' = U^{-1} L U$ comme variable ; $\varphi_n (u,v) = \int \exp i \, \rho_n (U^{-1} L U) d \mu (U^{-1} L U)$.

Par hypothèse μ est invariante et $d \mu (U^{-1} L U) = d \mu (L)$.■

Pour U de U_n l'expression $\rho_n (U^{-1} L U)$ comprend une somme finie d'après ce qui précède tandis que pour U quelconque ρ_n peut comprendre une somme infinie de termes.

Dans les théorèmes qui suivent, nous nous plaçons dans L_n et identifions la partie utile $P_n L P_n$ de L avec sa matrice L_n carrée n xn. Afin de simplifier les notations, sachant que nous sommes dans L_n, nous supprimons l'indice n de L_n. Dans ces conditions $\rho_n (L) = v_n .. M + v_n .. N$ s'écrit $\rho_n (L) = u .. M + v .. N$.

Théorème 3-2-4

Si la probabilité P est intrinséquement invariante par rapport à un sous groupe $\{U (t), t \in T\}$ à un paramètre de U_n, la fonction caractéristique $\varphi_{n,N}$ satisfait l'équation aux dérivées partielles $D \varphi_{n,N} = 0$ où :

$$D = \frac{\partial u'}{\partial t} .. \frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial v'}{\partial t} .. \frac{\partial}{\partial v'} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T(U(t)) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Démonstration :

La proposition 3 nous indique que, pour tout t,

$$\varphi_{n,N} (u,v) = \int \exp i \, \rho_n (U^{-1} (t) L U (t)) \, d \, \mu (L)$$

Par ailleurs la proposition 2 exprime que :

$$\int \exp i \, \rho_n (U^{-1} (t) L U (t)) \, d \, \mu (L) = \varphi_{n,N} (u', v')$$

où les nouvelles variables u' et v' dépendent de t et sont égales à :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T (t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Finalement la Proposition 3-1-5 indique que $\varphi_{n,N}$ est de classe C^∞. La fonction $\varphi_{n,N}(u'(t), v'(t))$ est constante et dérivable par suite :

$$\frac{d\varphi_{n,N}(u'(t), v'(t))}{dt} = \left\{ \frac{\partial u'}{\partial t} \cdot\cdot \frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial v'}{\partial t} \cdot\cdot \frac{\partial}{\partial v'} \right\} \varphi_{n,N} = 0 \blacksquare$$

Théorème 3-2-5

Soit P une probabilité sur (L_s, B_s); la probabilité P^n marginale de P est intrinsèquement invariante par rapport au groupe U_n des transformations unitaires de L_n si et seulement si la fonction caractéristique marginale φ_n de P est une fonction des variables cœfficients de u_n et v_n par l'intermédiaire des n fonctions :

$$\tau_p = \mathrm{Tr}\,(r_n + i\, s_n)^p \text{ où } r_n = \frac{u_n + u_n^t}{2},\ s_n = \frac{v_n - v_n^t}{2} \text{ et } p = 1, \ldots n.$$

Démonstration :

Rappelons que u_n, v_n représentent les matrices n x n des variables réelles $u_{j,k}$, $v_{j,k}$ pour $j,k \leqslant n$. D'après la proposition 1-7, les fonctions caractéristiques φ_n sont fonctions des variables $u_{j,k}$ et $v_{j,k}$ par l'intermédiaire des fonctions $r_{j,k} = \frac{u_{j,k} + u_{k,j}}{2}$ et $s_{j,k} = \frac{v_{j,k} - v_{k,j}}{2}$ et il existe une fonction ψ_n de n^2 variables telle que $\varphi_n(u_n, v_n) = \psi_n(r_n, s_n)$. Relativement à un opérateur unitaire U de U_n, effectuons sur les variables u_n, v_n la transformation T(U) de la proposition 2. Dans ces conditions les nouvelles variables u'_n, v'_n vérifient la relation $(u'_n + i\, v'_n) = U(u_n + i\, v_n)U^{-1}$ et d'après la proposition 3, nous avons l'identité $\varphi_n(u'_n, v'_n) = \varphi_n(u_n, v_n)$ quels que soient u_n, v_n et U de U_n. Pour les nouvelles variables r_n et s_n, nous obtenons les relations $\forall\ U \in U_n\ r'_n + i\, v'_n = U(r_n + i\, s_n)U^{-1}$ et $\psi_n(r'_n, s'_n) = \psi_n(r_n, s_n)$. Observons que $r_n + i\, s_n$ est une matrice symétrique n x n ayant par conséquent n valeurs propres $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ réelles. La fonction ψ_n est une fonction de la matrice $r_n + i\, s_n$ invariante sur les trajectoires $r'_n + i\, s'_n = U(r_n + i\, s_n)U^{-1}$. Or les valeurs propres $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ constituent un ensemble complet d'invariants et il en est de même des n fonctions indépendantes $\tau_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p$ pour $p = 1 \ldots n$. Or ces fonctions se calculent à partir de la matrice $r_n + i\, s_n$ par la formule $\tau_p = \mathrm{Tr}\,\{(r_n + i\, s_n)^p\}$ et les différentes fonctions τ_p sont réelles puisque les différentes valeurs propres λ_i le sont.

Réciproquement toute fonction caractéristique φ_n fonction des variables u_n, v_n par l'intermédiaire des fonctions τ_p pour $p = 1 \ldots n$ est constante sur les trajectoires de la transformation T (U) pour $U \in U_n$. Par conséquent $\forall\ U \in U_n$, la probabilité P et la probabilité P_U définie par $\forall\ A \in B\ P_U(A) = P(U\ A\ U^{-1})$ ont pour fonctions caractéristiques marginales respectivement $\varphi_n(u,v)$ et $\varphi_{U,n}(u,v) = \int e^{i\ \rho_n}(L)\ d\ P_U(L) = \int e^{i\ \rho_n}(L)\ d\ P\ (U\ L\ U^{-1}) = \int e^{i\ \rho_n\ (U^{-1}\ L\ U)}\ d\ P\ (L) = \varphi_n(u', v') = \varphi_n(u, v)$. Puisque la relation entre la probabilité P^n et sa fonction caractéristique φ_n est bijective, les probabilités marginales de P et de P_U relatives aux coordonnées $j,k \leqslant n$ sont égales et la probabilité marginale P^n de P est intrinsèquement invariante pour le sous-groupe U_n de U. ■

3-3 - Probabilité additive normale

Il s'agit dans ce paragraphe d'étudier l'existence d'une probabilité sur L_S, dite normale pour sa similitude avec la distribution normale dans $\mathbb{R}$, qui jouisse de la propriété d'invariance décrite précédemment et telle que les variables aléatoires $\{M_{j,k},\ N_{j',k'};\ j,j',\ k,k',\ \in \mathbb{N}\}$ soient indépendantes.

Proposition 3-3-1

Pour que les variables aléatoires réelles $\{M_{j,k}, N_{j',k'};\ j,j',\ k,k' \in \mathbb{N}\}$ soient indépendantes, il faut et il suffit que pour tout $n \geqslant 1$, la fonction caractéristique marginale $\varphi_n(u,v)$ soit le produit de $2\ n^2$ fonctions chacune de l'une des $2\ n^2$ variables $u_{j,k}$, $v_{j,k}$.

Démonstration :

$$\varphi_n(u, v) = \int \prod_{j,k} e^{i\ u_{j,k}\ M_{j,k}} \prod e^{i\ v_{j,k}\ N_{j,k}}\ d\ P\ (L)$$

est le produit $\prod_{j,k} \int e^{i\ u_{j,k}\ M_{j,k}}\ d\ P\ (L) \prod_{j,k} \int e^{i\ v_{j,k}\ N_{j,k}}\ d\ P\ (L)$

(cf [30] page 118 Déf.)

Réciproquement :

Si $\varphi_n(u,v)$ est le produit des fonctions $\psi_{n,j,k}(u_{j,k})\ \chi_{n,j,k}(v_{j,k})$, les variables $\{M_{j,k},\ N_{j,k};\ j,k \leqslant m\}$ sont indépendantes, en renormalisant les fonctions ψ et χ afin que $\psi(0) = 1$ et $\chi(0) = 1$, en introduisant les probabilités marginales P_K du corollaire 3-1-1, et d'après le corollaire d'unicité de la Proposition 3-1-3.■

Proposition 3-3-2

Pour une probabilité de L_s, les variables aléatoires $\{M_{j,k};\ N_{j',k'};\ j < k \leqslant n,\ j' < k' \leqslant n\}$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $n \geqslant 1$ la fonction caractéristique marginale $\varphi_n(u,v)$ est le produit de n^2 fonctions de $u_{j,k} + u_{k,j}$, $v_{j,k} - v_{k,j}$ pour $j < k \leqslant n$.

La démonstration est celle de la Proposition précédente en tenant compte cependant de la Proposition 3-1-7.

Théorème 3-3-3

Pour qu'une probabilité P sur L_s soit normale, il faut que pour tout $n \geqslant 1$, la probabilité caractéristique marginale φ_n ait la forme :

$$\varphi_n(u,v) = \exp\{ i m \sum_k u_{k,k} - \frac{\sigma^2}{2}[\sum_k u_{k,k}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j<k} (u_{j,k} + u_{k,j})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j<k} (v_{j,k} - v_{k,j})^2]\}$$

Démonstration :

S'il existe dans (L_s, B_s) une probabilité normale, d'après le théorème 2-5, pour tout n, la fonction caractéristique $\varphi_n(u,v)$ s'écrit $\varphi_n(u,v) = \psi_n(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ avec $\tau_p = \mathrm{Tr}\{(r_n + i\, s_n)^p\}$ et $r_n = \frac{u_n + u_n^t}{2}$ $s_n = \frac{v_n - v_n^t}{2}$. Par ailleurs en raison de l'indépendance des variables $M_{j,k}$ et $N_{j',k'}$ la fonction caractéristique $\varphi_n(u,v)$ s'écrit :

$$\varphi_n(u,v) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j(u_{j,j}) \prod_{j<k} \beta_{j,k}\left(\frac{u_{j,k} + u_{k,j}}{2}\right) \prod_{j<k} \gamma_{j,k}\left(\frac{v_{j,k} - v_{k,j}}{2}\right)$$

où les fonctions α, β, γ sont des fonctions caractéristiques d'une seule variable. Par identification en utilisant les variables $r_{j,k}$ et $s_{j,k}$, nous obtenons les équations fonctionnelles :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j(r_{j,j}) \prod_{j<k} \beta_{j,k}(r_{j,k}) \prod_{j<k} \gamma_{j,k}(s_{j,k})$$

Comme les différentes fonctions caractéristiques doivent être compatibles, nous en déduisons que :

$$\forall\, j,k \qquad \alpha_j \overset{\text{def}}{=} \alpha,\ \beta_{j,k} \overset{\text{def}}{=} \beta \qquad \gamma_{j,k} \overset{\text{def}}{=} \gamma$$

en raison de la symétrie des fonctions τ_k par rapport aux variables r et s. Considérons plus particulièrement le cas n = 2, nous obtenons :

$$\psi_2 (r_{1,1} + r_{2,2},\ r_{1,1}^2 + r_{2,2}^2 + 2\,(r_{1,2}^2 + s_{1,2}^2)) = \alpha\,(r_{1,1})\ \alpha\,(r_{2,2})\ \beta(r_{1,2})\ \gamma(s_{1,2}).$$

Il vient immédiatement que $\beta = \gamma$. Par ailleurs $\beta\,(r_{1,2}^2 + s_{1,2}^2) = \beta(r_{1,2}^2)\ \beta(s_{1,2}^2)$ et comme β est une fonction continue, la solution de cette équation fonctionnelle vaut :

$$\beta(r_{1,2}^2) = e^{a\, r_{1,2}^2} \qquad \text{pour } a \in \mathbb{C}$$

Ensuite posons $s_{1,2} = o$ et $2t^2 = r_{1,1}^2 + r_{2,2}^2 + 2r_{1,2}^2$, il vient :

$$\psi_2 (r_{1,1} + r_{2,2},\ 2t^2) = \alpha\,(r_{1,1})\ \alpha(r_{2,2})\ e^{a\,(t^2 - \frac{r_{1,1}^2}{2} - \frac{r_{2,2}^2}{2})}$$

et par suite $\alpha\,(r_{1,1})\ e^{-\frac{a\, r_{1,1}^2}{2}} = e^{b\, r_{1,1}}$ pour $b \in \mathbb{C}$. En regroupant les résultats antérieurs, il s'ensuit que :

$$\alpha\,(r_{1,1}) = e^{b\, r_{1,1} + \frac{a}{2} r_{1,1}^2}$$

$$\beta(r_{1,2}) = e^{a\, r_{1,2}^2}$$

ou encore que :

$$\varphi_n (u,v) = \exp\{b \sum_{k \leqslant n} u_{k,k} + \frac{a}{4}(2 \sum_{k \leqslant n} u_{k,k}^2 + \sum_{j < k \leqslant n} [(u_{j,k} + u_{k,j})^2 + (v_{j,k} - v_{k,j})^2]\}$$

Pour que $\varphi_n\,(u,v)$ soit une fonction caractéristique, elle doit satisfaire pour tout u,v réels, l'inégalité $|\,\varphi\,(u,v)\,| \leqslant 1$. Par suite la constante

complexe b est imaginaire pure que nous notons b = i m et a doit avoir une partie réelle négative que nous notons R e a = - σ^2.

Par ailleurs la fonction caractéristique φ_n (u,v) vérifie la relation φ_n (- u, - v) = $\overline{\varphi_n(u,v)}$ qui impose à la partie imaginaire de a d'être nulle.

La famille φ_n (u,v) ainsi obtenue est une famille de fonctions caractéristiques marginales compatibles.■

Corollaire :

L'espace (L_s, B_s) ne peut être probabilisé par une probabilité normale σ-additive.

Démonstration :

D'après les résultats antérieurs, une probabilité normale σ-additive doit avoir des probabilités P^n marginales σ-additives de la forme impliquée par la proposition 3. Comme ces probabilités marginales sont compatibles, nous en déduisons l'existence d'une probabilité unique dans l'espace ($M = \underset{I \times I}{\pi} \mathbb{C}_{i,j}$, $\underset{I \times I}{\otimes} C_{i,j}$). La transformation T du théorème 1-1 qui fait passer de $\underset{I \times I}{\otimes} C_{i,j}$ à B n'est pas un σ-isomorphisme comme nous allons le voir pas contradiction. Soit $L_s = \underset{N}{\cup} \{L;\ L \in L_s \ ||\ L\ || \leqslant N\}$. L'ensemble $\{L;\ L \in L_s \ ||\ L\ || \leqslant N\}$ est inclu dans $\underset{\substack{i,j=1-\infty \\ i \leqslant j}}{\cap} \{L; |L_{i,j}| \leqslant N\}$.

Pour une probabilité normale sur L_s, les évènements $\{L: |L_{i,j}| \leqslant N\}$ pour i,j = 1 .. ∞, sont indépendants et de probabilité inférieure à une constante ρ strictement inférieure à 1. Par suite P $\{L;\ L \in L_s,\ ||\ L\ || \leqslant N\} = o$ et P (L_s) = o ce qui contredit l'hypothèse pour P d'être une probabilité de (L_s, B_s).■

3-4 - Opérateurs aléatoires linéaires, symétriques et compacts

En physique théorique, les opérateurs qui interviennent au début de la théorie sont symétriques et bornés, ils sont aussi bien souvent compacts. Nous allons considérer le sous-ensemble L_c des opérateurs linéaires bornés symétriques et compacts de L. D'après la proposition 1-2-10 et son corollaire, cet ensemble appartient à la σ-algèbre B. A tout opérateur L de L_c, il est possible de faire correspondre une suite $\{z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ orthonormale de vecteurs propres. Cette suite peut être choisie complète dans H séparable et nous avons :

$$\forall x \in H \qquad L\,x = \sum_{n=1}^{\infty} < L\,x, z_n > z_n$$

Si l'opérateur L est un O.A.L. à valeurs dans L_c, nous écrirons que L est un O.A.L.C. Pour tout ω de Ω, à l'opérateur $L(\omega) \in L_c$, nous pouvons associer une suite $\{\lambda_n(\omega); n \in \mathbb{N}\}$ uniquement déterminée de valeurs propres. Nous supposons que $\lambda_n(\omega)$ est la valeur propre associée à $z_n(\omega)$. L'objet de ce paragraphe est d'étudier les problèmes liés aux suites d'éléments propres $(\lambda_n(\omega), z_n(\omega))$ associées à L (ω) O.A.L.C. Nous allons avoir besoin de deux lemmes préliminaires qui seront utilisés plusieurs fois ultérieurement.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et dans Ω, nous supposons définieune relation d'équivalence $\sim$. Introduisons alors l'ensemble $\tilde{\Omega}$ des classes d'équivalence et l'application canonique c qui, à ω associe sa classe d'équivalence $\tilde{\omega}$. Soit alors $\tilde{\mathcal{A}}$, la σ-algèbre la plus fine de façon que c soit mesurable de Ω dans $\tilde{\Omega}$. La σ-algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ est la σ-algèbre finale par c, composée des ensembles $\{B; B \in P(\tilde{\Omega}), c^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Définissons alors $\dot{\mathcal{A}} = \{A; A = c^{-1}(B), B \in \tilde{\mathcal{A}}\}$ sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$.

Lemme 3-4-1

La σ-algèbre $\dot{\mathcal{A}}$ est la sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ des ensembles de $\mathcal{A}$, saturés pour la relation d'équivalence et les σ-algèbres $\dot{\mathcal{A}}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ sont σ-isomorphes.

Démonstration :

Si $A \in \mathcal{A}$ et si A est saturé, introduisons l'image directe de A par c soit $B = c(A)$. Comme A est saturé, $c^{-1}(B) = A$. Puisque $A \in \mathcal{A}$ alors $B \in \tilde{\mathcal{A}}$ et $A \in \dot{\mathcal{A}}$. Réciproquement soit $A \in \dot{\mathcal{A}}$, il existe B de $\tilde{\mathcal{A}}$ tel que $c^{-1}(B) = A$ et par suite $A \in \mathcal{A}$. De plus $\forall \omega \in A$, $c(\omega) \in B$ et $\forall \omega_1$ vérifiant $\omega_1 \sim \omega$, $c(\omega_1) = c(\omega) \in B$, par suite $\omega_1 \in A$; ainsi tout ω_1 équivalent à un élément de $A \in \mathcal{A}$ appartient à A qui est ainsi saturé.

Finalement $\forall \omega \in \Omega$, $\{\tilde{\omega}\} = c\, c^{-1}(\{\tilde{\omega}\})$, par suite $c(\dot{\mathcal{A}}) = \tilde{\mathcal{A}}$ et les σ-algèbres $\dot{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ sont σ-isomorphes.■

En plus de l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ introduisons l'espace probabilisable $(\Omega', \mathcal{A}')$. Soit f une fonction de Ω dans Ω' mesurable surjective mais non injective. Définissons dans Ω la relation d'équivalence $\sim$ suivante $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow f(\omega_1) = f(\omega_2)$.

Lemme 3-4-2

Soit f une fonction mesurable de Ω sur Ω'. Si il existe une fonction h de Ω' dans Ω, mesurable et telle que $\forall \omega' \in \Omega'$ $f(h(\omega')) = \omega'$ alors la σ-algèbre $f^{-1}(\mathcal{A}')$ est égale à $\dot{\mathcal{A}}$ sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ des ensembles A de $\mathcal{A}$ saturés par rapport à la relation $\sim$ d'équivalence.

Démonstration :

Effectuons la décomposition canonique de la fonction f :

$$\Omega \xrightarrow{c} \tilde{\Omega} \xrightarrow{\tilde{f}} \Omega' \qquad f = \tilde{f} \circ c \qquad h$$

c est l'application canonique surjective qui à ω associe la classe d'équivalence $\tilde{\omega}$ et $\tilde{f}$ est définie $\forall\, \tilde{\omega}$ si $\omega \in \tilde{\omega}$ par $\tilde{f}(\tilde{\omega}) = f(\omega)$.

Nous avons $f = \tilde{f} \circ c$. La fonction $\tilde{f}$ est bijective de $\tilde{\Omega}$ sur Ω'. Pour tout ensemble A' de P (Ω'), $\tilde{f}^{-1}(A') = \{\tilde{\omega};\ \tilde{f}(\tilde{\omega}) \in A'\} = \{\tilde{\omega};\ f(\omega) \in A' \text{ et } \tilde{\omega} = c(\omega)\} = c(f^{-1}(A'))$. Comme de plus f est mesurable, pour tout A' de $\mathcal{A}'$, nous avons $f^{-1}(A')$ élément de $\mathcal{A}$. L'ensemble $f^{-1}(A')$ est saturé et par conséquent $f^{-1}(A') \in \dot{\mathcal{A}}$ en conservant la notation du lemme antérieur. Nous obtenons ainsi que $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \dot{\mathcal{A}}$ et $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{A}') \subset \tilde{\mathcal{A}}$.

Réciproquement :

Soit h mesurable de Ω' dans Ω. Pour tout ω' de Ω', introduisons $\omega = h(\omega')$ et $\tilde{\omega} = c(h(\omega'))$, appliquons $\tilde{f}$ sur $\tilde{\omega}$, il vient $\tilde{f}(\tilde{\omega}) = f(\omega) = f(h(\omega')) = \omega'$ par hypothèse. Or l'application $\tilde{f}$ est bijective et par suite $\tilde{f}^{-1} = c \circ h$. L'application $\tilde{f}^{-1}$ est mesurable comme application composée d'applications mesurables et $\tilde{f}(\tilde{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{A}'$.

En regroupant les deux résultats obtenus, $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{A}') = \tilde{\mathcal{A}}$ et $f^{-1}(\mathcal{A}') = \dot{\mathcal{A}}$. ■

Remarque :

Le résultat $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{f}^{-1}(\mathcal{A}')$ sera utilisé dans le théorème 3-4-2.

Proposition 3-4-1

Soit L (ω) un O.A.L.C. et voit $\forall\, \omega \in \Omega$, $E_\lambda(\omega)$ sa famille spectrale. La fonction E_λ en λ est un processus aléatoire, fortement séparable et pour toute variable aléatoire réelle $\lambda(\omega)$, le projecteur $E_{\lambda(\omega)}(\omega)$ est mesurable en ω.

Démonstration :

$\forall\, \lambda$ fixé dans $\mathbb{R}$, $\omega \to E_\lambda(\omega)$ est la fonction composée de $\omega \to L(\omega)$ et de $L \to E_\lambda(L)$ respectivement mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans (L, B) et de (L, B) dans lui-même (proposition 1-2-12) et par suite c'est une fonction mesurable. $\forall\, \omega$ fixé de Ω, $E_\lambda(\omega)$ est fortement continue à droite et comme $\mathbb{R}$ est séparable, le processus est fortement séparable. La fonction

$< E_\lambda(\omega)\, x, x >$ de λ est continue à droite pour tout x de H, et par suite pour toute variable aléatoire réelle $\lambda(\omega)$, la variable $< E_{\lambda(\omega)}(\omega)\, x, x >$ est aléatoire réelle (cf. [30] page 96 proposition 3-6-1) et le projecteur $E_{\lambda(\omega)}(\omega)$ est aléatoire (théorème 1-2-1). ■

Espace $(\bar{U}, B_{\bar{U}})$

Comme l'ensemble U des opérateurs unitaires est un sous-ensemble de B (proposition 1-2-17), nous définissons $B_U \overset{\text{def}}{=} B \cap U$ σ-algèbre des ensembles de B, sous-ensembles de U. Considérons l'ensemble $\bar{U}$ des automorphismes intérieurs de U. Un opérateur $\bar{U}$ de $\bar{U}$ correspondant à U transforme tout V de U en $U\,V\,U^{-1}$. Le centre Z du groupe U vaut par définition $Z = \{U;\ \forall\, V \in U, U\,V\,U^{-1} = V\}$. Par conséquent en introduisant la relation d'équivalence $\sim$ relative à Z par $U_1 \sim U_2 \Leftrightarrow U_2^{-1}\,U_1 \in Z$, l'ensemble $\bar{U}$ est isomorphe au quotient de U par cette relation d'équivalence (cf. [10] page 177). Nous définissons alors $B_{\bar{U}}$ comme la σ-algèbre la plus fine telle que l'application canonique de U dans $\bar{U}$ soit mesurable et nous sommes alors dans les conditions du lemme 1.

Espace (Λ, B_λ)

Soit L_c, l'ensemble des opérateurs symétriques et compacts et introduisons dans cet ensemble, la relation d'équivalence $L \overset{\sim}{\sim} L' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, U \in U$ tel que $L' = U\,L\,U^{-1}$.

Dans l'espace Λ des classes d'équivalence, soit alors B_λ la σ-algèbre la plus fine telle que l'application canonique soit mesurable de L_c dans Λ. En raison du lemme 1, cette σ-algèbre est isomorphe à la σ-algèbre $\dot{B}_c$ sous σ-algèbre de B_c des ensembles saturés par rapport à $\overset{\sim}{\sim}$.

Un opérateur L de L_c défini l'ensemble $\hat{\lambda}$ des valeurs propres de L. Si le nombre a est une valeur propre de multiplicité r_a pour L alors a se retrouve r fois dans $\hat{\lambda}$; 0 peut être une valeur propre de L avec une multiplicité nulle, finie ou dénombrable (cf. [36] page 231). Il sera utile d'ordonner les éléments de $\hat{\lambda}$. Pour cela, considérons la suite $\{\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_n, \ldots\}$ des valeurs propres non nulles ordonnées par valeur décroissante de leur module ainsi que la suite des valeurs propres égales à zéro. Seuls trois cas peuvent se produire pour un espace H séparable de dimension infinie.

$\mu_1 \quad \mu_2 \ldots\ldots\ldots \mu_n \ldots\ldots\ldots$ $\downarrow \nearrow \downarrow \qquad \downarrow \nearrow$ $0 \quad 0 \qquad 0$	valeurs propres différentes de zéro, ordonnées par module décroissant. 0 valeur propre de multiplicité dénombrable.
$\mu_1 \quad \mu_2 \qquad \mu_n$ $\downarrow \nearrow \downarrow \qquad \downarrow$ $0 \quad 0 \qquad 0 \to 0 \to 0 \ldots\ldots$	0 valeur propre de multiplicité dénombrable.
$\mu_1 \quad \mu_2 \qquad \mu_n \, \mu_{n+1} \to \mu_{n+2} \ldots$ $\downarrow \nearrow \downarrow \qquad \downarrow \nearrow$ $0 \quad 0 \qquad 0$	0 valeur propre de multiplicité finie.

La valeur propre λ_n par définition est la n-ième valeur propre en suivant les flèches pour le cas correspondant à l'opérateur L en question. Soit λ la suite $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ ainsi obtenue. Deux opérateurs $\overline{\sim}$ équivalents ont la même suite λ de valeurs propres et réciproquement une suite λ de valeurs propres détermine de façon unique une classe d'équivalence.

Un représentant L de la classe vaut par exemple :

$$L : x \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n \text{ où } \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$$

est une base de H séparable.

Nous identifierons dorénavant les éléments de Λ avec les suites $\lambda = \{\lambda_1, \ldots \lambda_n \ldots\}$ de valeurs propres. De cette façon Λ devient un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nous pouvons munir $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ de la σ-algèbre produit $\bigotimes_{\mathbb{N}} R$ des σ-algèbres des boréliens des différentes coordonnées.

Lemme 3-4-3

La première valeur propre μ_1 de L est une fonction mesurable de L_c dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

D'après [36] page 230, la valeur propre μ_1 satisfait la relation $|\mu_1| = \sup_{\|y\| = 1} | < Ly, y > |$. En introduisant une suite dense $\{y_h; h \in \mathbb{N}\}$ dans $S = \{y; \|y\| = 1\}$, il vient $|\mu_1| = \sup_h | < L y_n, y_n > |$ et $|\mu_1|$ devient une fonction mesurable de la variable L.

Considérons alors la famille spectrale E_λ (L). Nous pouvons calculer les deux projecteurs

$$P^+ = E_{|\mu_1(L)|}(L) - \lim_{n \to \infty} E_{|\mu_1(L)| - \frac{1}{n}}(L) \text{ et}$$

$$P^- = \underline{E}_{|\mu_1(L)|}(L) - \lim_{n \to \infty} \underline{E}_{|\mu_1(L)| - \frac{1}{n}}(L)$$

qui d'après la proposition 1, sont mesurables de L. Soient les deux ensembles de B: $A^+ = \{L;\ P^+(L) \neq 0\}$ et $A^- = \{L;\ P^-(L) \neq 0\}$. Comme μ_1 est valeur propre de L, nous avons l'égalité $L = A^+ + (A^- - A^+)$. Observons que la fonction $\mu_1(L)$ est égale à la fonction mesurable :

$$L \to \begin{cases} +|\mu_1(L)| & L \in A^+ \\ -|\mu_1(L)| & L \in A^- - A^+ \end{cases} \blacksquare$$

Lemme 3-4-4

Pour tout L de L_c, il est possible d'attacher un vecteur propre z_1 à la valeur propre μ_1 de façon que la fonction $L \to z_1(L)$ soit mesurable de L dans H.

Démonstration :

Dans le sous ensemble A^+ de B, nous savons que $\mu_1 = \sup_{y \neq 0} \frac{|<Ly,y>|}{||y||^2}$ et que le projecteur P^+ est non nul. Considérons les vecteurs P^+e_1, P^+e_2, ... P^+e_n, ... Soit j le plus petit indice i tel que $P^+e_i \neq 0$. Cet indice est fini puisque dans le cas contraire P^+ serait nul. Chacun des vecteurs P^+e_i pour i fixé est un vecteur aléatoire défini sur A^+. L'ensemble $\{L;\ j = i_o\} = \{L;\ L \in A^+,\ P^+e_i = 0 \text{ si } i < i_o,\ P^+e_{i_o} \neq 0\}$ est mesurable et j est un temps d'arrêt dénombrable. Introduisons finalement le vecteur unitaire $z_1 = P^+ \frac{e_j}{||P^+e_j||}$ qui jouit des propriétés suivantes :

$P^+z_1 = P^+ \frac{P^+e_j}{||P^+e_j||} = z_1$, l'application $L \to \frac{P^+(L)\,e_j(L)}{||P^+(L)\,e_j(L)||} = z_1(L)$

est mesurable (cf. [30] proposition 3-6-1). En effectuant une construction semblable dans $A^- - A^+$, nous définissons une fonction $L \to z_1(L)$ mesurable de L dans H. ■ La construction précédente sera dite canonique, elle dépend de la base $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ choisie.

Lemme 3-4-5

La n-ième valeur propre μ_n et le n-ième vecteur propre z_n attaché de façon canonique à μ_n, sont deux fonctions mesurables de L.

Démonstration :

La propriété est vraie pour n = 1. Supposons la vraie pour n - 1. Nous introduisons l'opérateur $M_n = L - \mu_1 \mid z_1 > < z_1 \mid \ldots\ldots - \mu_{n-1} \mid z_{n-1} > < z_{n-1} \mid$ mesurable de L dans L. Or, maintenant la valeur propre μ_n de L devient la première valeur propre de M_n et le lemme s'obtient en appliquant les deux lemmes antérieurs. ■

Théorème 3-4-2

Si Λ est identifié avec le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites canoniques de valeurs propres, la σ-algèbre B_λ est la σ-algèbre trace de $\bigotimes_{\mathbb{N}} R$ dans Λ.

Démonstration :

Soit f l'application qui, à L de L_c associe la suite canonique $(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots)$ de valeurs propres de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout L fixé de L_c, la multiplicité r éventuellement infinie, de zéro vérifie $r = \mathrm{Tr}\,(E_o\,(L) - E_{o-}\,(L))$ et le nombre s éventuellement infini de valeurs propres μ_i distinctes de zéro vérifie $s = \mathrm{Tr}\,(E_{o-}\,(L) + I - E_o\,(L))$. L'ensemble L_c se décompose en une somme dénombrable d'ensembles B_c mesurables $L_c = \sum_{(a,b) \in \bar{\mathbb{N}} \times \bar{\mathbb{N}}} \{L;\ L \in L_c,\ r = a,\ s = b\}$ et l'image par f de L_c se décompose également $f\,(L_c) = \sum_{(a,b) \in \bar{\mathbb{N}} \times \bar{\mathbb{N}}} f(\{L;\ L \in L_c\ r = a,\ s = b\})$. Pour a,b fixés, toute suite $(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots)$ de l'ensemble $f\,(\{L;\ L \in L_c,\ r = a,\ s = b\})$ provient d'une suite unique comprenant b termes $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots$ sujettes aux conditions $\mid \mu_1 \mid \geqslant \mid \mu_2 \mid \ldots\ldots \geqslant \mid \mu_n \mid \ldots$ et d'une suite de a termes égaux à zéro. Par conséquent $f\,(L_c)$ appartient à $\bigotimes_{\mathbb{N}} R$.

Dans $f\,(L_c)$ considérons dorénavant la σ-algèbre induite par la σ-algèbre $\bigotimes_{\mathbb{N}} R$.

L'application f se décompose en une application canonique c de L sur Λ et en une application bijective $\tilde{f}$ de Λ sur $f\,(L)$.

D'après le lemme 5, l'application $L \to \mu_n$ où μ_n est la n-ième valeur propre de L est mesurable ; par ailleurs :

$$L = \sum_{(a,b) \in \bar{\mathbb{N}} \times \bar{\mathbb{N}}} L\,1\,(L)_{\{L;\, r = a,\ s = b,\ L \in L_c\}}$$

et par conséquent l'application $L \to \lambda_n$ est mesurable. La σ-algèbre dans $f\,(L_c)$ étant la σ-algèbre trace, nous en déduisons que l'application $L \to \{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots\}$ est mesurable.

D'autre part, soit h l'application mesurable de f (L_c) dans L définie par $\forall \lambda \in f(L_c)$ h $(\lambda) = \sum_{\mathbb{N}} \lambda_n \mid e_n > < e_n \mid$. En utilisant le lemme 2, nous obtenons le théorème.■

Lemme 3-4-6

Il existe une application canonique $L \to U(L)$ de L_c dans U mesurable et satisfaisant $L = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \mid U(L) e_{k_n} > < U(L) e_{k_n} \mid$ pour une sous-suite convenable $\{k_n, n \in \mathbb{N}\}$ des entiers.

Démonstration :

Considérons la suite orthonormale $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs propres, définie dans le lemme 5. La suite $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas complète si 0 est valeur propre de L (cf. [36] page 232). Dans ce cas, l'espace des vecteurs propres attachés à 0 est le sous espace $(E_o(L) - E_{o-}(L))H$ défini par le projecteur $P_o = E_o(L) - E_{o-}(L)$. En suivant la méthode utilisée paur obtenir le lemme 5, on peut construire une suite orthonormale $\{z_n^o; n \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs propres de P_o (et aussi de L) complète dans $(E_o(L) - E_{o-}(L))H$.

La suite $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ construite à partir des deux suites $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{z_n^o; n \in \mathbb{N}\}$ suivant la méthode utilisée dans le paragraphe espace (Λ, B_λ), est une base pour H.

Introduisons l'opérateur U (L) qui transforme la base $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ dans la base $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Nous étendons U (L) à un opérateur linéaire borné de H dans H et U (L) devient ainsi unitaire. Comme fonction de L, l'opérateur unitaire U (L) est mesurable d'après le lemme 5 et le théorème 1-2-2. Finalement $L = \sum_{\mathbb{N}} \lambda_n \mid f_n > < f_n \mid$ ou encore $L = \sum_{\mathbb{N}} \mu_n \mid U(L) e_{k_n} > < U(L) e_{k_n} \mid$.■

Dans l'espace produit $\Lambda \times \bar{U}$, nous définissons la σ-algèbre produit $B_\lambda \times B_{\bar{U}}$. Soit alors l'application $f: (\lambda, \bar{U}) \to L = \sum_{\mathbb{N}} \lambda_n \mid Ue_n > < Ue_n \mid$ de $\Lambda \times \bar{U}$ dans L_c, où U est un représentant quelconque de la classe $\bar{U}$. La fonction f est surjective mais n'est pas injective et permet d'introduire une relation d'équivalence $\underset{p}{\sim}$ définie de la façon suivante:

$$(\lambda, \bar{U}) \underset{p}{\sim} (\lambda', \bar{U}') \Leftrightarrow f(\lambda, \bar{U}) = f(\lambda', \bar{U}')$$

Soit $\dot{B}$ la sous σ-algèbre de $B_\lambda \otimes B_{\bar{U}}$ des ensembles saturés par rapport à $\underset{p}{\sim}$.

Théorème 3-4-3

La σ-algèbre B_c de L_c est isomorphe à la σ-algèbre $\dot{B}$ de $\Lambda \times U$, sous σ-algèbre de $B_\lambda \times B_U$.

Démonstration :

Comme les deux applications $L \to \lambda$ et $L \to U(L)$ sont mesurables en raison du théorème 2 et du lemme 6, nous déduisons en premier lieu que l'application $L \to \bar{U}(L)$ est mesurable et ensuite que l'application $h : L \to (\lambda, \bar{U}(L))$ l'est aussi. Par ailleurs l'application $(\lambda, U) \to \sum_{\mathbb{N}} \lambda_n \mid Ue_n > < Ue_n \mid$ est mesurable et par suite il en est de même de $f : (\lambda, \bar{U}) \to \sum_{\mathbb{N}} \lambda_n \mid Ue_n > < Ue_n \mid$. Nous utilisons alors le lemme 2 pour obtenir le théorème.■

Ce dernier théorème implique que toute probabilité dans l'espace produit $(\Lambda \times U, B_\lambda \times B_{\bar{U}})$ se transforme grâce à f en une probabilité dans l'espace (L, B) mais que réciproquement une probabilité dans (L, B) ne définit une probabilité que dans $(\Lambda \times \bar{U}, \dot{B})$ en raison de l'isomorphisme entre B et $\dot{B}$.

Le cas où l'opérateur compact L est presque-sûrement sans valeur propre égale à zéro simplifie notablement la théorie antérieure puisqu'alors les suites $\{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots\}$ et $\{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots\}$ sont presque-sûrement égales.

3-5 Représentation de GELFAND d'un opérateur aléatoire linéaire commutant presque-sûrement avec lui-même.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soit H un espace de HILBERT. Etudions le cas où sauf sur un ensemble négligeable N, les opérateurs $L(\omega)$ commutent deux à deux.

Définition 3-5-1

Un opérateur aléatoire linéaire L défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ commute presque-sûrement avec lui-même s'il existe un ensemble négligeable N tel que, quels que soient $\omega, \omega' \in N^c$, on a $L(\omega) L(\omega') = L(\omega') L(\omega)$.

Si nous supposons de plus que L est un O.A.L. symétrique, nous pouvons introduire la *algèbre de BANACH commutative $\mathbb{B}$ engendrée par les différents opérateurs $L(\omega)$ pour $\omega \in N^c$.

Cette algèbre est isométrique et * isomorphe à $C(\Lambda)$, algèbre des fonctions complexes continues et bornées sur le spectre Λ de $\mathbb{B}$. Ce spectre Λ est un espace topologique HAUSDORFF et compact (cf. [11] page 869 lemme 8). Comme $\mathbb{B}$ est une algèbre quelconque, son spectre Λ n'est pas nécessairement identifiable à une partie compacte de $\mathbb{C}$. Il existe un * isomorphisme T qui à chaque fonction f de $C(\Lambda)$ associe un élément de $\mathbb{B}$.

Plus précisément si T est un isomorphisme isométrique de $C(\Lambda)$ sur $\mathbb{B}$, il existe une mesure spectrale $E(.)$ unique définie sur la σ-algèbre Σ des boréliens de Λ telle que $\forall L \in \mathbb{B}\ \exists f \in C(\Lambda)$ avec $L = T(f) = \int f(\lambda)\, d\, E(\lambda)$.

La notion d'intégrale utilisée par [11] page 891 peut être remplacée par celle relative à une mesure E à valeurs dans L, faiblement σ-additive (chapitre 2 § 1).

A tout ω de N^c correspond $L(\omega)$ dans $\mathbb{B}$ et par suite une fonction $f_\omega(\lambda)$ continue bornée sur Λ.

Le problème se pose de savoir si $f(\omega, \lambda) = f_\omega(\lambda)$ fonction de $\Omega \times \Lambda$ dans $\mathbb{C}$ est mesurable lorsque $\Omega \times \Lambda$ est muni de la σ-algèbre produit $\mathfrak{A} \otimes \Sigma$. Avant de résoudre ce problème précis, nous donnons plusieurs résultats sur les O.A.L. qui commutent presque-sûrement avec eux-mêmes.

Définition 3-5-2

Une mesure μ-faiblement σ-additive définie sur $\mathfrak{A}$ et à valeurs dans L est quasi-spectrale si :

$\alpha)$ $\forall A \in \mathfrak{A}$ $\qquad \mu(A)$ est symétrique et $\mu(A) \leqslant I$

$\beta)$ $\forall A, B \in \mathfrak{A}$ $\qquad \mu(A)\, \mu(B) = \mu(B)\, \mu(A)$

Nota :

Comme $A = (A \cap B) + A\text{-}B$ et que $B = (A \cap B) + (B\text{-}A)$, la propriété β est équivalente à :

$\beta')$ $\forall A, B$ disjoints de $\mathfrak{A}$ $\qquad \mu(A)\, \mu(B) = \mu(B)\, \mu(A)$

Remarque :

D'après le théorème de PETTIS (cf. [15] page 197) toute mesure faiblement σ-additive d'ensembles, est fortement σ-additive. Il en est ainsi de l'intégrale indéfinie $\int_E f(\lambda)\, d\, E_\lambda$ relativement à $E \in \Sigma$.

Intervertion des signes d'intégration

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soit (Λ, Σ) un espace probabilisable muni d'une mesure $E(.)$ spectrale fortement σ-additive à valeurs dans L. Définissons dans l'espace produit $(\Omega \times \Lambda, \mathcal{A} \otimes \Sigma)$ la mesure μ produit de P par E en nous appuyant sur le corollaire de la proposition 2-1-7. Remarquons que la mesure μ est quasi-spectrale sur la semi-algèbre S de BOOLE des pavés mesurables de $\Omega \times \Lambda$. Il est aisé de vérifier que μ est quasi-spectrale sur la σ-algèbre $\mathcal{A} \otimes \Sigma$ engendrée par S.

Proposition 3-5-1

Pour toute fonction $f(\omega, \lambda)$ mesurable de $\Omega \times \Lambda$ dans $\mathbb{C}$, les intégrales suivantes quand elles existent, sont égales.

$$\iint_{\Omega \times \Lambda} f(\omega, \lambda)\, d\mu(\omega, \lambda),\ \int_\Omega dP(\omega) \int_\Lambda f(\omega, \lambda)\, dE(\lambda),$$

$$\int_\Lambda dE(\lambda) \int_\Omega f(\omega, \lambda)\, dP(\omega)$$

Démonstration :

Certaines de ces intégrales peuvent être définies au sens fort. Comme les intégrales existent en tant qu'élément de L, il suffit de vérifier que :

$$\forall x, y \in H \quad \left\langle \iint_{\Omega \times \Lambda} f\, d\mu\, x, y \right\rangle = \left\langle \int_\Omega dP \int_\Lambda f\, dE\, x, y \right\rangle$$

$$= \left\langle \int_\Lambda dE \int_\Omega f\, dP\, x, y \right\rangle$$

En observant que :

$$\left\langle \iint_{\Omega \times \Lambda} f\, d\mu\, x, y \right\rangle = \iint_{\Omega \times \Lambda} f\, d\langle \mu x, y \rangle$$

$$\left\langle \int_\Omega dP \int_\Lambda f\, dE\, x, y \right\rangle = \int_\Omega dP \int_\Lambda f\, d\langle E x, y \rangle$$

$$\left\langle \int_\Lambda dE \int_\Omega f\, dP\, x, y \right\rangle = \int_\Lambda d\langle E x, y \rangle \int_\Omega f\, dP$$

les égalités en découlent en raison du théorème de FUBINI pour l'intégrale double.■

Le résultat antérieur bien qu'assez limité, est remarquable puisque, en définissant $L(\omega) = \int_\Lambda f(\omega, \lambda)\, dE(\lambda)$ et $g(\lambda) = \int_\Omega f(\omega, \lambda)\, dP(\omega)$, la formule d'intervertion des intégrales s'écrit $\int_\Omega L(\omega)\, dP(\omega) = \int_\Lambda g(\lambda)\, dE(\lambda)$. Ainsi une intégrale par rapport à une mesure spectrale peut être égale à l'espérance mathématique d'un O.A.L.

Théorème 3-5-2

Soit H un espace de HILBERT séparable, si un opérateur aléatoire linéaire L (.) intégrable défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifie

$$\forall A, B \in \mathcal{A}$$
$$\int_A L(\omega)\, dP(\omega) \int_B L(\omega)\, dP(\omega) =$$
$$\int_B L(\omega)\, dP(\omega) \int_A L(\omega)\, dP(\omega) \text{ alors } L(.)$$

est un O.A.L. qui commute presque-sûrement avec lui-même.

Démonstration :

Introduisons $\mu(A) = \int_A L(\omega)\, dP(\omega)$. La famille $\{\mu(A), A \in \mathcal{A}\}$ d'opérateurs de L est permutable. Comme H est séparable, il existe une suite $\{\mu(A_n); n \in \mathbb{N}\}$ (cf. [36] page 354) tel que tout opérateur $\mu(A)$ de la famille soit limite forte d'une sous-suite $\{\mu(A_{n_k}); k \in \mathbb{N}\}$. Par conséquent, pour tout L de L satisfaisant $\forall n\ \mu(A_n)\, L = L\, \mu(A_n)$, nous avons par passage à la limite pour une sous-suite convenable, $\forall x \in H\ \mu(A)\, L\, x = L\, \mu(A)\, x$ c'est-à-dire $\mu(A)\, L = L\, \mu(A)$. Il s'ensuit que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall B \in \mathcal{A}\ \mu(A_n) \int_B L(\omega)\, dP(\omega) = \int_B L(\omega)\, dP(\omega)\, \mu(A_n)$ et par conséquent (proposition 1-5-8 et proposition 1-5-5) $\mu(A_n)\, L(\omega) = L(\omega)\, \mu(A_n)$ pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable N_n dépendant de n; pour ω en dehors de l'ensemble négligeable $N = \bigcup_n N_n$, nous obtenons $\forall n\ \mu(A_n)\, L(\omega) = L(\omega)\, \mu(A_n)$ ou encore $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu(A)\, L(\omega) = L(\omega)\, \mu(A)$.

La même construction peut se répéter en considérant la famille $\{L(\omega); \omega \in N^c\}$ pour déduire finalement qu'il existe un ensemble N' négligeable tel que :

$$\forall \omega' \in N'^c \qquad L(\omega')\, L(\omega) = L(\omega)\, L(\omega') \text{ pour tout } \omega \text{ de } N^c.$$

Le théorème s'obtient en considérant l'ensemble négligeable $N \cup N'$ puisque $\forall \omega, \omega' \notin N \cup N'$ $\quad L(\omega')\, L(\omega) = L(\omega)\, L(\omega')$.■

Nota :

Si de plus L (.) est p.s. symétrique, il existe alors une famille spectrale étalée sur un compact de $\mathbb{R}$ (cf. [36] page 355) et à tout ω n'appartenant pas à $N \cup N'$, nous pouvons associer une fonction $f_\omega(\lambda)$ satisfaisant $L(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f_\omega(\lambda)\, dE_\lambda$, la mesure $\mu(.)$ s'écrit alors :

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \mu(A) = \int_\Lambda dP(\omega) \int_{\mathbb{R}} f_\omega(\lambda)\, dE(\lambda)$$

Théorème 3-5-3

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit un espace (Λ, Σ) probabilisable tel que Σ soit engendré par une semi-algèbre Δ dénombrable. Sur Σ, est définie une mesure spectrale E. L'espace L provient d'un espace de HILBERT H séparable. Un opérateur aléatoire linéaire $L(\omega)$ a presque-sûrement la représentation $\int_\Lambda f(\omega, \lambda)\, d\, E(\lambda)$ où $f(\omega, \lambda)$ est mesurable en λ pour presque tout ω. Alors la fonction $f(\omega, \lambda)$ des deux variables (ω, λ) est mesurable de $(\Omega \times \Lambda, \mathcal{A} \otimes \Sigma)$ faiblement complèté par rapport à la mesure produit de P par E, dans $(\mathbb{C}, C)$.

Démonstration :

Dans l'espace produit $\Omega \times \Lambda$, nous avons déjà introduit la mesure $\mu(.)$ produit de P par E faiblement σ-additive et bornée comme extension de la mesure produit sur la semi-algèbre S des pavés mesurables de $\Omega \times \Lambda$. (Voir intervertion des signes d'intégration). De la même façon, considérons la fonction d'ensembles $\nu_N(.)$ définie sur la semi-algèbre S à partir de la formule :

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \forall E \in \Sigma \qquad \nu_N(A \times E) = \int_{A \cap \Omega_N} d\, P(\omega) \int_E f(\omega, \lambda)\, d\, E(\lambda)$$

où Ω_N désigne l'ensemble $\{\omega;\ \| L(\omega) \| \leqslant N\}$. Cette fonction est fortement σ-additive en A, faiblement σ-additive en E par suite elle est faiblement σ-additive sur S. De plus c'est une fonction bornée. D'après le corollaire de la proposition 2-1-7, elle s'étend de façon unique à une mesure faiblement σ-additive et bornée sur $\mathcal{A} \otimes \Sigma$. Conservons la notation $\nu_N(.)$ pour cette mesure.

Pour tout x de H, sur S, la mesure $\nu_{N,x}(.) = < \nu_N(.)\, x, x >$ est uniformément majorée par $< P\ x\ E(.)\, x, x >$. Par suite $\nu_{N,x}(.)$ est absolument continue par rapport à $\mu_x(.) = < \mu(.)\, x, x >$. Il existe une fonction complexe mesurable $g_x(\omega, \lambda)$ sur $\mathcal{A} \otimes \Sigma$ telle que $\forall B \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$.

$$\nu_{N,x}(B) = \iint_B g_x(\omega, \lambda)\, d < \mu(\omega, \lambda)\, x, x >$$

En se limitant aux pavés de S, il vient pour presque tous les ω de Ω_N.

$$\int_E f(\omega, \lambda)\, d < E(\lambda)\, x, x > = \int_E g_x(\omega, \lambda)\, d < E(\lambda)\, x, x >$$

En premier lieu nous passons à la limite sur N, Ensuite nous considérons uniquement les ensembles E en nombre dénombrable de Δ. Il existe alors un ensemble négligeable Δ_x tel que $\forall\ \omega \in \Delta_x^c$, $\forall\ E \in \Delta$.

$$\int_E f(\omega, \lambda)\, d < E(\lambda)\, x, x > = \int_E g_x(\omega, \lambda)\, d < E(\lambda)\, x, x >$$

Par conséquent $\forall\ \omega \in \Delta_x^c$, $\forall\ E \in \Sigma$ les deux intégrales sont égales et $f(\omega, \lambda)$ est égale presque-sûrement par rapport à $< P \times E(.)\, x, x >$ à $g_x(\omega, \lambda)$. De cette façon $f(\omega, \lambda)$ est mesurable de $(\mathcal{A} \times \Sigma)_{x,x}$ espace complété de $(\mathcal{A} \times \Sigma)$ pour la mesure $< P \times E(.)\, x, x >$, dans $(\mathbb{C}, C)$.

La propriété étant vraie pour tout x de H, la fonction $f(\omega, \lambda)$ est mesurable de $\overline{(\mathcal{A} \otimes \Sigma)} = \bigcap_{x \in H} (\mathcal{A} \times \Sigma)_{x,x}$ complétée faiblement de $(\mathcal{A} \times \Sigma)$. (Définition donnée lors du théorème 2-1-3) pour la mesure produit $\mu = P \times E$.■

■

CHAPITRE IV
APPLICATIONS

4-1 - Semi-groupes aléatoires

Dans ce paragraphe, l'espace H de HILBERT est séparable afin que la norme d'un opérateur L(.) aléatoire linéaire soit mesurable (th. 1.2.4.). Ces éléments aléatoires sont définis comme d'habitude sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Définition 4-1-1

Une famille $\{T(t,\omega);\ t \in [0, +\infty[,\ \omega \in \Omega\}$ d'éléments de L est un semi-groupe aléatoire à trajectoires continues si par définition :

$\alpha)$ $\forall \omega \in \Omega$ $\{T(t,\omega),\ t \in [0, +\infty[\}$ est un semi-groupe continu.

$\beta)$ $\forall\ t \in [0, +\infty[,\ \{T(t,\omega),\ \omega \in \Omega\}$ est un opérateur aléatoire linéaire.

La topologie de L intervient pour définir la continuité des trajectoires du semi-groupe. On parlera ainsi de semi-groupes aléatoires à trajectoires continues pour les topologies faibles, fortes ou uniformes.

Lemme 4-1-1

Soit $\{T(t,\omega);\ t \in [0, +\infty[,\ \omega \in \Omega\}$ un semi-groupe aléatoire à trajectoires continues pour la topologie forte. Alors $\beta(\omega) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \| T(t,\omega) \|$ est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ et $\{e^{-\beta(\omega)t} T(t,\omega);\ t \in [0, +\infty[\ \omega \in \Omega\}$ est un semi-groupe aléatoire à trajectoires équi-bornées et continues pour la topologie forte.

Démonstration :

Bien que le processus $T(t,\omega)$ soit fortement séparable, il n'est pas certain que le processus réel $\|T(t,\omega)\|$ le soit. Cependant, en adaptant la démonstration de [42], p. 232, il vient aisément que :

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ r \in Q}} \frac{1}{r} \log \| T(r, \omega) \| = \lim_{\substack{t \to \infty \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{1}{t} \log \| T(t, \omega) \|$$

$$= \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \| T(t, \omega) \|$$

La valeur $\beta(\omega)$ commune est ainsi une variable aléatoire réelle.

Considérons alors le processus $\{e^{-\beta(\omega)t}\, T(t,\omega);\ t \in [0, +\infty[,\ \omega \in \Omega\}$. Il vérifie les deux conditions de la définition 1, mais de plus pour ω fixé, $e^{-\beta(\omega)t}\, T(t,\omega)$ est équi-borné.■

Théorème 4-1-2

Soit $\{A(\omega);\ \omega \in \Omega\}$ une famille d'opérateurs linéaires non nécessairement bornés à domaine dense dans H. Il existe p.s. un semi-groupe à trajectoires équi-bornées et continues pour la topologie forte tel que pour presque tout ω de Ω, l'opérateur $A(\omega)$ soit l'opérateur infinitésimal de la trajectoire correspondant à ω du semi-groupe aléatoire si et seulement si la famille $\{(I-n^{-1}\, A(\omega))^{-m};\ n, m \in \mathbb{N},\ \omega \in \Omega\}$ est un processus aléatoire à valeurs dans L, à trajectoires p.s. bornées.

Démonstration :

Pour tout λ réel positif et pour tout x de H, nous avons $R(\lambda,\omega)x \overset{\text{def}}{=} (\lambda I - A(\omega))^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t,\omega)\, x\, dt$ (d'après [42], th. 1, p. 240).

Le symbole d'intégration représente une intégrale de RIEMANN en raison de la continuité forte des trajectoires. Dans ces conditions, $R(\lambda,\omega)$ est mesurable pour tout λ de $D = \{\lambda;\ \mathrm{Re}\ \lambda > 0\}$ et le théorème 2, [42], p. 241, implique la nécessité de la condition.

Réciproquement :

Pour presque tout ω de Ω, il existe un semi-groupe $T(t,\omega)$ fortement continu et équi-borné (cf. [42], p. 246). Pour t fixé de $[0,\infty[$ introduisons $J_n(\omega) = (I - n^{-1}\, A(\omega))^{-1}$ ainsi que $T_t^{(n)} = \exp(t\, A(\omega)\, J_n(\omega))$ qui sont deux opérateurs aléatoires linéaires de Ω dans L. Par passage à la limite sur n, il vient $\lim_{n\to\infty}$ forte $T_t^{(n)}(\omega) = T_t(\omega)$ qui est ainsi mesurable.■

Remarque :

L'opérateur infinitésimal $A(\omega)$ du semi-groupe aléatoire n'est pas nécessairement borné. Il jouit cependant des propriétés suivantes :

$$1^\circ)\ \forall x \in H\ \{\omega;\ A(\omega)x \text{ existe}\} = \{\omega;\ \lim_{h\to 0} \sup \left\| \frac{T(h)-1}{h} x \right\| < \infty\}$$

L'application $\omega \to A(\omega)\, x$ est mesurable de Ω dans $\bar{H}$ pour tout x fixé. (L'ensemble où la fonction n'est pas définie est mesurable).

$$2^\circ)\ \{\omega;\ \|A(\omega)\| \text{ existe}\} = \{\omega;\ \lim_{h\to 0} \sup \left\| \frac{T(h)-1}{h} \right\| < \infty\}$$

L'application $\omega \to A(\omega)$ est mesurable de Ω dans $\bar{L}$. (voir déf. 1-2-1).

Remarque :

Il est possible de définir $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t,\omega)\, dt$ comme une intégrale de LEBESGUE sur $[0, +\infty[$. Cette notion servirait dans le cas où le semi-groupe aléatoire ne serait pas à trajectoires fortement continues et constituerait une généralisation de la notion d'espérance mathématique d'un opérateur à valeurs dans L.

Proposition 4-1-3

Associons à la famille $\{L(\omega);\ \omega \in \Omega\}$ d'opérateurs auto-adjoints non nécessairement bornés pour tout ω de Ω, la famille spectrale $E(\lambda,\omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et la résolvante $R(\mu,\omega)$, $\mu \in \mathbb{C}\text{-}\mathbb{R}$ de $L(\omega)$. Alors $\{E(\lambda,\omega),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega\}$ est un processus aléatoire si et seulement si $\{R(\mu,\omega);\ \mu \in \mathbb{C}\text{-}\mathbb{R},\ \omega \in \Omega\}$ est un processus aléatoire.

Démonstration :

Pour tout ω de Ω, nous avons d'une part :

$$\forall \mu \in \mathbb{C}\text{-}\mathbb{R} \qquad R(\mu, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda}\, d\, E(\lambda, \omega)$$

et d'autre part :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad E(\lambda, \omega) = \lim_{a \to \infty} \lim_{\delta \to 0_+} \lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{1}{2 i \Pi} \int_{a+\delta}^{\lambda - \delta} [R(\mu - i\epsilon, \omega) - R(\mu + i\epsilon, \omega)]\, d\, \mu$$

d'après [11], p. 920, th. 1.

Quels que soient $\omega \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{C}\text{-}\mathbb{R}$, les opérateurs $E(\lambda;\omega)$ et $R(\mu,\omega)$ appartiennent à L. Pour μ fixé, si $E(\lambda,\omega)$ est un processus aléatoire alors $R(\mu,\omega)$ est un O.A.L. et pour λ fixé, si $R(\mu,\omega)$ est un processus aléatoire alors $E(\lambda,\omega)$ est un O.A.L. ■

4-2 - Opérateurs densités en Mécanique Quantique.

Nous allons introduire dans l'espace (L,B) une probabilité de façon à considérer l'espérance mathématique d'un opérateur aléatoire linéaire intégrable comme l'opérateur densité relatif à une expérience de Mécanique Quantique. Nous obtiendrons ainsi une V.A.O.L. intégrable pour la topologie uniforme, pour laquelle nous appliquerons les méthodes du chapitre 3.

Les propriétés de l'opérateur densité sont décrites par exemple dans [25], p. 280. Soit H un espace de HILBERT séparable dont les vecteurs représentent les états purs du système physique en considération, les opérateurs densités ont la forme:

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |x_k\rangle \langle x_k| \quad \text{où } \{p_k;\ k \in \mathbb{N}\}$$

est une suite de probabilités discrètes et $\{|x_k\rangle;\ k \in \mathbb{N}\}$ est une suite quelconque de vecteurs de H. La notation $|x_k\rangle\langle x_k|$ représente le projecteur sur le vecteur $|x_k\rangle$

De la représentation ci-dessus, on déduit immédiatement que ρ est un opérateur borné, symétrique, positif et de plus $\mathrm{Tr}\rho = 1$, $\mathrm{Tr}\,\rho^2 \leqslant 1$ d'où $||\rho|| \leqslant 1$. On obtient même que $\mathrm{Tr}\,\rho^2 = 1$ si et seulement si ρ se réduit à un projecteur sur un vecteur, on dit alors que l'état du système, représenté par l'opérateur densité ρ est pur.

Par exemple, pour un oscillateur harmonique (correspondant à un mode particulier de la lumière), on introduit l'opérateur densité:

$$\rho_{nat} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \frac{1}{1+\langle n\rangle} \left(\frac{\langle n\rangle}{1+\langle n\rangle}\right)^n \text{ avec } \langle n\rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

pour la lumière naturelle c'est-à-dire provenant d'un corps noir. L'espace de HILBERT H, a pour base les vecteurs $|n\rangle$, $n = 0,1 \ldots$ et les symboles $\hbar, \omega, k, T$ représentent les variables classiques de la loi de PLANCK d'émission du corps noir. On introduit aussi l'opérateur densité pour un état parfaitement cohérent:

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ qui vaut:}$$

$$\rho_{coh} = |\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-|\alpha|} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^n\, \bar{\alpha}^{n'}}{(n!\, n'!)^{1/2}} |n\rangle\langle n'|.$$

Réciproquement considérons un opérateur ρ linéaire borné symétrique positif tel que $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ et $\mathrm{Tr}\,\rho^2 \leqslant 1$. Dans ces conditions (cf. [8], p. 94), l'opérateur ρ de HILBERT-SCHMIDT, est compact et se décompose à partir de la suite p_k de valeurs propres et de la suite $|x_k\rangle$ de vecteurs propres suivant la formule:

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\ |x_k\rangle\langle x_k|.$$

Ici les vecteurs $|x_k>$ sont orthogonaux, comme ρ est positif, chacune des valeurs propres p_k est positive et de plus $\mathrm{Tr}\ \rho = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. La suite $\{p_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ peut être considérée comme une suite de probabilités discrètes.

Le système physique en considération d'hamiltonien H supposé donné, évolue au cours du temps. Si $|x(t_o)>$ est l'état du système à un instant initial t_o, à l'instant t, cet état s'est transformé en $|x(t)> = U(t,t_o)\,|x(t_o)>$ où $U(t,t_o)$ est l'opérateur unitaire d'évolution que nous supposons exister et qui vérifie l'équation : $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} U(t,t_o) = H\,U(t,t_o)$. Par suite si l'état du système à l'instant t_o initial est représenté par l'opérateur densité $\rho(t_o)$ à l'instant t ultérieur, nous obtenons :

$$\rho(t) = U(t,t_o)\ \rho(t_o)\ U^{-1}(t,t_o).$$

Si le système physique d'Hamiltonien H est soumis à l'influence aléatoire du milieu extérieur, nous obtenons à l'instant t, une famille aléatoire d'opérateurs densités $\rho(t)$. Introduisons un espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{A})$ et rappelons l'action aléatoire du milieu extérieur en écrivant l'Hamiltonien total comme égale à $H + V(\omega)$ où $V(\omega)$ décrit l'action aléatoire du milieu extérieur. L'opérateur densité correspondant à $\omega \in \Omega$ se note alors $\rho(t,\omega)$.

Proposition 4-2-1

Toute probabilité dans (L,B) telle que L soit presque-sûrement un opérateur densité, définit une probabilité dite canonique dans H de support $S = \{x;\ x \in H,\ ||x|| = 1\}$, réciproquement, toute probabilité dans (H,B_H) et de support S définit une probabilité dans (L,B) telle que L soit presque-sûrement un opérateur densité de cas pur.

Démonstration :

Par hypothèse, sauf sur un ensemble négligeable de L, l'opérateur aléatoire L est un opérateur densité. L'opérateur L compact définit une suite de probabilités discrètes soit : $\{p(k, L);\ k \in \mathbb{N}\}$ et une suite de vecteurs propres $\{|x(k,L)>,\ k \in \mathbb{N}\}$. En fait, les vecteurs propres ne sont pas parfaitement déterminés mais d'après le lemme 3-4-5, il existe une application mesurable de L dans H qui, à L compact, associe son k ième vecteur propre canonique $|x(k,L)>$. Dans ces conditions, pour tout ensemble B de B_H, définissons :

$$P(B, L) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k, L)\ 1_B(|x(k, L)>) \text{ où}$$

$$1_B(|x(k, L)>) = \begin{cases} 0 & |x(k, L)> \notin B \\ 1 & |x(k, L)> \in B \end{cases}$$

Pour L fixé, P(.,L) est une probabilité sur B_H et pour B fixé, P(B,.) somme dénombrable de fonctions mesurables de L, est mesurable de B dans B_H. Nous définissons alors $Q(B) = \int_L P(B,L)\, d\, P(L)$ où P est la probabilité définie dans (L,B). La fonction Q(B) est une probabilité dans H à support S.

Réciproquement, si Q est une probabilité dans H à support S, considérons la fonction f : $|x> \rightarrow |x><x|$ de H dans L. Cette fonction f est mesurable de B_H dans B. Définissons alors une probabilité dans L par la formule :

$$\forall A \in B \qquad P'(A) = Q(f^{-1}(A)) \blacksquare$$

Nota :

Bien que les probabilités P et P' dans L ne soient pas nécessairement égales, il n'en reste pas moins vrai que les espérances mathématiques de L par rapport à ces deux probabilités sont égales. En effet:

$$\begin{aligned}
\rho &= \int_L L\, d\, P'(L) = \int_H |x><x|\, d\, Q(x) \\
&= \int_H |x><x|\, d \int_L P(x, L)\, d\, P(L) \\
&= \int_H \int_L |x><x|\, d\, P(x, L)\, d\, P(L) \\
&= \int_L d\, P(L) \int_H |x><x|\, d\, P(x, L) \\
&= \int_L L\, d\, P(L)
\end{aligned}$$

Chacune des intégrales ci-dessus a un sens et on en vérifie l'égalité en considérant l'expression $< \rho\, y, y >$ quel que soit y de H.■

Les deux probabilités P et P' dans L correspondent à la même probabilité Q dans H.

Conclusion :

L'étude des opérateurs densités aléatoires se réduit à l'étude des probabilités dans H à support S et l'opérateur densité peut être considéré dans tous les cas comme une espérance mathématique sur des cas purs aléatoires.

Etudions maintenant l'évolution du système physique. Ainsi que nous l'avons rappelé, un vecteur $|x>$ se transforme en $U(t,t_o)\ |x>$ entre les instants t_o et t, l'opérateur densité $\rho(t) = E(L)$ s'exprime en fonction de l'opérateur densité à l'instant t_o par la formule $U(t,t_o)\ \rho(L_o)\ U^{-1}(t,t_o)$. La masse p_k sur le projecteur $|x_k><x_k|$ à l'instant t_o, se déplace et à l'instant t, elle se porte sur le projecteur $U(t,t_o)\ |x_k><x_k|\ U^{-1}(t,t_o)$. Généralisons le résultat antérieur, introduisons la probabilité P(.,t) dans L telle que L soit p.s. un opérateur densité et telle que :

$$\forall B \in B \qquad P(B, t) = P(U^{-1}(t, t_o)\ B\ U(t, t_o)).$$

De cette façon :

$$E_t(L) \overset{\text{déf}}{=} \int L \, d\,P\,(L,\,t) \;=\; \int L \, d\,P\,(U^{-1}\,(t,\,t_o)\,L\,U\,(t,\,t_o))$$

$$= \int U\,(t,\,t_o)\,L\,U^{-1}\,(t,\,t_o)\,d\,P\,(L) \;=\; U\,(t,\,t_o)\;\rho\,(t_o)\,U^{-1}(t,\,t_o) \;=\; \rho(t)$$

Utilisons les méthodes et les notations du chapitre 3, paragraphe 2, introduisons les fonctions caractéristiques $\varphi_n(u,v,t)$ marginales relatives à la probabilité $P(.,t)$: $\varphi_n(u,v,t) = \int e^{i\rho_n(L)}\, d\,P(L,t)$.

Ces fonctions sont de classe C^∞. Rappelons que :

$$\rho_n\,(L) \;=\; \sum_{j,\,k \leqslant n} (u_{j,\,k}\cdot M_{j,\,k} \;+\; v_{j,\,k}\cdot N_{j,\,k})$$

où $L = M + i\,N$ et $\quad u_n = \begin{bmatrix} \underline{u_{j,\,k}}\,\Big|^{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_n = \begin{bmatrix} \underline{v_{j,\,k}}\,\Big|^{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comme la probabilité P dépend du temps, il en est de même de la famille des fonctions caractéristiques marginales. Précisons les équations d'évolution pour cette famille. Nous obtenons que :

$$\varphi_n\,(u,\,v,\,t) = \int e^{i\,\rho_n(L)}\, d\,P\,(L,\,t) = \int e^{i\,\rho_n(L)}\, d\,P\,(U^{-1}\,(t,\,t_o)\,L\,U\,(t,\,t_o))$$

$$= \int e^{i\,\rho_n(U\,(t,\,t_o)\,L\,U^{-1}\,(t,\,t_o))}\, d\,P\,(L).$$

Soit $(u'_n + i\,v'_n) = U(t,t_o)\,(u_n + i\,v_n)\,U^{-1}(t,t_o)$ les matrices u'_n et v'_n peuvent comprendre un nombre infini de coefficients non nuls et par suite il faut introduire :

$$\varphi_\infty\,(u,v) = \int e^{\,i\,(\sum_{j,k}\,(u_{j,k}\,M_{j,k} \,+\, v_{j,k}\,N_{j,k}))}\, d\,P(L)$$

qui a un sens puisque L est p.s. de HILBERT-SCHMIDT dès que u, v, sont de HILBERT-SCHMIDT.

Dans ce cas, $\varphi_\infty(u,v)$ s'obtient par passage à la limite ponctuelle grâce au théorème de LEBESGUE, sur la suite $\{\varphi_n(u,v);\ n \in \mathbb{N}\}$. Il vient alors $\varphi_n(u,v,t) = \varphi_\infty\,(u'_n,\,v'_n)$. De la même façon, les dérivées $\dfrac{\partial\,\varphi_\infty}{\partial u'_{i,k}}, \dfrac{\partial\,\varphi_\infty}{\partial v'_{j,k}}$ existent et par dérivation totale par rapport au temps :

$$\frac{d\,\varphi_n\,(u,v,t)}{d\,t} = \frac{\partial\,\varphi_\infty}{\partial\,u'_n} \cdot\!\cdot \frac{\partial\,u'_n}{\partial\,t} \cdot\!\cdot \frac{\partial\,\varphi_\infty}{\partial\,v'_n} \cdot\!\cdot \frac{\partial\,v'_n}{\partial\,t}$$

ou encore

$$\frac{d\,\varphi_n\,(u,v,t)}{d\,t} = \mathrm{Re}\,\{(\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial\,u'_n} - i\,\frac{\partial\,\varphi_\infty}{\partial\,v'_n}) \cdot\!\cdot \frac{\partial\,u'_n}{\partial\,t} + i\,\frac{\partial\,v'_n}{\partial\,t})\}$$

Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial u'_n}{\partial t}$ et $\frac{\partial v'_n}{\partial t}$. Nous obtenons par dérivation :

$$i\hbar \frac{d}{dt}(u'_n + i\,v'_n) = H(u'_n + i\,v'_n) - (u'_n + i\,v'_n)H$$

En reportant dans l'équation d'évolution, il vient:

$$i\hbar \frac{d\varphi_n(u, v, t)}{dt} = i\,Im\left\{\left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial u'_n} - i\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial v'_n}\right) \ldots (H(u'_n + i\,v'_n) - (u'_n + i\,v'_n)H)\right\}$$

où est supposé réel pour calculer Im.

Le second membre comprend une série double dont la convergence doit être étudiée. Dans le cas où l'opérateur U est diagonal relativement à la base choisie dans H, les nouvelles variables u'_n, v'_n satisfaisant $u'_n + i\,v'_n = U(u_n + i\,v_n)U^{-1}$, constituent deux matrices infinies où seuls les termes de la sous-matrice nxn avec $j,k \leqslant n$, sont non nuls. Dans ce cas, la seule fonction φ_n suffit pour calculer $\varphi_\infty(u'_n, v'_n)$. De plus, comme U est unitaire, si les variables u_n, v_n sont indépendantes, il en est de même des variables u'_n et v'_n. Par conséquent, les équations d'évolution pour les fonctions caractéristiques deviennent:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad i\hbar \frac{d\varphi'_n(u, v; t)}{dt} = i\,Im\left\{\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial u'_n} - i\frac{\partial \varphi'_n}{\partial v'_n}\right) \ldots (H(u'_n + i\,v'_n) - (u'_n + i\,v'_n)H)\right\}$$

Si l'évolution du système physique d'hamiltonien $H + V(\omega)$ ne se traduit du point de vue macroscopique par aucune modification observable lorsque ω varie dans Ω, il est naturel de penser que la probabilité P dans (L,B) telle que l'opérateur aléatoire L soit p.s. un opérateur densité, est intrinséquement invariant par rapport au groupe $\{U(t,t_o);\ t \in \mathbb{R}\}$ relatif à l'hamiltonien H non perturbé. Ecrivons les équations qui en résultent pour les fonctions caractéristiques marginales φ_n :

$$0 = \frac{d\varphi_n(u'_n, v'_n)}{dt} = Im\left\{\left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial u'_n} - i\frac{\partial \varphi'_\infty}{\partial v'_n}\right) \ldots (H(u'_n + i\,v'_n) - (u'_n + i\,v'_n)H)\right\}$$

Application :

Oscillateur harmonique.

Le système physique que nous considérons, est choisi particulièrement simple, ce sera l'oscillateur harmonique. Nous allons établir l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire φ'_n pour que la probabilité P soit intrinséquement invariante pour l'évolution libre du système. Les fonctions caractéristiques marginales ont été notées φ'_n. L'hamiltonien H du système vaut H = N dont la représentation matricielle diagonale pour la base $\{|n\rangle;\ n \in \mathbb{N}\}$ usuelle de H, est égale à (cf. [25], p.372):

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 2 & \\ & 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

L'équation aux dérivées partielles d'invariance pour φ_n devient en supprimant l'indice prime :

$$(N\, v_n - v_n\, N) \,..\, \frac{\partial\, \varphi_n\,(u,\, v)}{\partial\, u_n} + (u_n\, N - N\, u_n) \,..\, \frac{\partial\, \varphi_n\,(u,\, v)}{\partial\, v_n} = 0$$

Le terme général de $(N\, v_n - v_n\, N)$ se calcule sans difficulté :

$$(N\, v_n - v_n\, N)_{j,\,k} = v_{j,\,k}\,(j-k) \qquad j,\, k \leqslant n$$

et l'équation aux dérivées partielles se transforme en :

$$\sum_{\substack{j,\,k \leqslant n \\ j \neq k}} (j - k) \left[v_{j,\,k} \frac{\partial\, \varphi_n}{\partial\, u_{j,\,k}} - u_{j,\,k} \frac{\partial\, \varphi_n}{\partial\, v_{j,\,k}} \right] = 0$$

Observons que les variables diagonales $u_{i,i}$, $v_{i,i}$ n'interviennent pas et que la probabilité P ne satisfait aucune condition restrictive relativement aux variables $L_{i,i}$. Tenons compte dès maintenant que L est un opérateur presque-sûrement symétrique. Supposons de plus que les variables $L_{j,k}$ $j \leqslant k$ soient indépendantes. Dans ces conditions :

$$\varphi'_n\,(u_{i,i}, u_{j,k}, v_{j,k}) = \psi_n\,(u_{i,i}, r_{j,k}, s_{j,k}) = \varphi_{n,n} \prod_{j<k} \psi_{j,k}$$

$$\text{où } r_{j,k} = u_{j,k} + u_{k,j},\ s_{j,k} = v_{j,k} - v_{k,j}$$

et où $\varphi_{n,n}$ est une fonction des n variables $u_{i,i}$, $\psi_{j,k}$ est une fonction des variables $r_{j,k}$ et $s_{j,k}$. L'équation aux dérivées partielles se réduit à :

$$\sum_{j \leqslant k} (j - k) \left[s_{j,\,k} \frac{\partial \log \psi_{j,\,k}}{\partial\, r_{j,\,k}} - r_{j,\,k} \frac{\partial \log \psi_{j,\,k}}{\partial\, s_{j,\,k}} \right] = 0$$

ou encore au système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$j < k \qquad s_{j,k} \frac{\partial \log \psi_{j,k}}{\partial r_{j,k}} = r_{j,k} \frac{\partial \log \psi_{j,k}}{\partial s_{j,k}}$$

Par intégration nous obtenons si $j < k$, que $\psi_{j,k}$ est une fonction de $r_{j,k}$, $s_{j,k}$ par l'intermédiaire de la fonction $r_{j,k}^2 + s_{j,k}^2$, soit $\psi_{j,k}(r_{j,k}, s_{j,k}) = \chi_{j,k}(r_{j,k}^2 + s_{j,k}^2)$. Finalement:

$$\varphi_n(u, v) = \varphi_{n,n}(u_{i,i}) \prod_{j<k} \chi_{j,k}\left((u_{j,k} + u_{k,j})^2 + (v_{j,k} - v_{k,j})^2\right).$$

La probabilité marginale de P sur la coordonnée j,k avec $j < k$ est invariante par changement dans $L_{j,k}$ e $^{i\theta_{j,k}}$ de $\theta_{j,k}$ quelconque de $[0, 2\Pi]$. Pour que L reste symétrique, il faut modifier $L_{k,j}$ en conséquence.

Dans le cas d'un oscillateur harmonique en interaction faible avec un thermostat nous pouvons introduire comme probabilité invariante la probabilité telle que:

$$L_{n,n} \underset{p.s.}{=} \frac{e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$L_{j,k} \underset{p.s.}{=} e^{i\theta_{j,k}} \sqrt{L_{j,j} L_{k,k}} \quad \forall j < k$$

où $\theta_{j,k}$ est une variable aléatoire réelle de loi uniforme dans $[0, 2\Pi]$. Pour $j > k$, il faut que $L_{j,k} = \overline{L}_{k,j}$.

Une étude ultérieure pourrait supposer que les coefficients diagonaux présentent des perturbations autour d'une valeur moyenne mais ces perturbations ne peuvent être décrites par une loi normale puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad L_{n,n} \geqslant \underset{p.s.}{0}$.

4-3 - Equations différentielles linéaires à coefficients aléatoires *

Ce paragraphe considère des équations différentielles lineaires d'une variable, disons du temps t dont les coefficients non nécessairement indépendants du temps t, sont de plus aléatoires. Physiquement

* Ce paragraphe a été effectué en collaboration avec monsieur ROLANDO REBOLLEDO.

de telles équations interviennent lorsque les valeurs numériques des coefficients proviennent de mesures entachées d'erreurs ou lorsque les coefficients correspondent à un milieu dont les caractéristiques physiques ne sont pas déterminées avec précision. Ce paragraphe s'appuiera sur les résultats classiques de la théorie des équations différentielles linéaires, présentés par exemple dans [11], chapitre 13.

Définition 4-3-1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soit H un espace de HILBERT séparable. Supposons donner une application $\omega \to T(\omega)$ de Ω dans l'ensemble des opérateurs auto-adjoints non nécessairement bornés définis sur H. Alors $T(\omega)$ est un opérateur aléatoire auto-adjoint (O.A.A.) si la famille spectrale $\{E_\lambda(\omega), \lambda \in \mathbb{R}\}$ de $T(\omega)$ est un processus aléatoire.

Rappelons que $\{E_\lambda(\omega); \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un processus aléatoire si quel que soit λ fixé de $\mathbb{R}$, l'application $\omega \to E_\lambda(\omega)$ est un O.A.L. (Voir déf. 2 § 3).

Définition 4-3-2

Un opérateur τ aléatoire différentiel formel (O.A.D.F.) de degré n dans un intervalle $I \subset \bar{\mathbb{R}}$, est une fonction :

$$\tau(.): \omega \to \tau(\omega) = \sum_{j=o}^{n} a_j(t, \omega) \frac{d^j}{(d\,t)^j}$$

où les coefficients $a_j(t,\omega)$, $j=o,\ldots,n$ complexes mesurables pour tout t de I et de classe C^∞, sont tels que, pour tout ω de Ω, l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $a_n(t,\omega) = o$, est discret dans I. Si $a_n(t,\omega) \neq o$ pour tout ω de Ω et pour tout t de I, on dit que τ est régulier.

Dans ce paragraphe, l'espace de HILBERT H sera l'espace L^2 (I) espace de HILBERT séparable des fonctions complexes sur I de carrés intégrables par rapport à la mesure de LEBESGUE sur I et les opérateurs aléatoires différentiels formels sont réguliers. Désignons par A^n (I), l'espace vectoriel des fonctions f définies sur I, de classe C^{n-1} et de dérivée $f^{(n-1)}$ absolument continues.

Proposition 4-3-1

Soit τ un O.A.D.F. presque-sûrement régulier et d'ordre n dans l'intervalle $I \subset \bar{\mathbb{R}}$. Etant donnée une fonction $g(t,\omega)$ mesurable et intégrable à ω fixé sur tout sous-intervalle compact de I ainsi que, pour un point t_o de I, étant données n variables aléatoires complexes

$c_o(\omega),\ldots, c_{n-1}(\omega)$, il existe une fonction aléatoire unique $f(t,\omega)$ telle que $\forall\omega\in\Omega$, $f(.,\omega)\in A^n(I)$ et telle que pour presque tout ω de Ω,

$$a)\ \tau f = g$$

$$b)\ \left(\frac{d}{dt}\right)^j f(t_o,\omega) = c_j(\omega), \qquad j = o, \ldots, n-1$$

Démonstration :

Sauf sur un ensemble N négligeable de Ω, l'opérateur τ est régulier et de degré n. Soit $\omega\in N^c$.

Cas 1

Supposons que I soit un ensemble compact de $\mathbb{R}$, par exemple $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Introduisons la fonction $F(t,\omega)$ vectorielle à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ d'expression $F(t,\omega) \overset{def}{=} [f_o(t,\omega),\ldots f_{n-1}(t,\omega)]^t$. On note le vecteur colonne à l'aide du transposé du vecteur ligne pour gagner de la place.

Il est possible de remplacer l'équation différentielle a) par le système d'équations différentielles de degré 1 suivant :

$$\frac{d}{dt} f_o(t,\omega) - f_1(t,\omega) = o$$

.....

$$\frac{d}{dt} f_{n-2}(t,\omega) - f_{n-1}(t,\omega) = o$$

$$\frac{d}{dt} f_{n-1}(t,\omega) + \frac{1}{a_n(t,\omega)} \{a_{n-1}(t,\omega) f_{n-1}(t,\omega) + \ldots + a_o(t,\omega) f_o(t,\omega)\}$$

$$= \frac{1}{a_n(t,\omega)} g(t,\omega)$$

Ces équations ont un sens si f_o appartient à $A^n(I)$.

Introduisons de nouveaux vecteurs colonnes dans $\mathbb{C}^n$:

$$G(t,\omega) = [o, \ldots. o, a_n^{-1}(t,\omega)\, g(t,\omega)]^t$$

$$C(t,\omega) = [c_o(\omega), \ldots., c_{n-1}(\omega)]^t$$

Ainsi que la matrice $A(t,\omega)$ définie sur $\mathbb{C}^n$ par

$$A_{i,j}(t,\omega) = -\delta_{i+1,j} \qquad o \leqslant i < n-1 \qquad o \leqslant j \leqslant n-1$$

$$A_{n-1,j}(t,\omega) = a_n^{-1}(t,\omega)\, a_j(t,\omega) \qquad o \leqslant j \leqslant n-1$$

Dans ces conditions, les équations a) et b) deviennent équivalentes à :

$$\frac{d}{dt} F(t, \omega) + A(t, \omega) F(t, \omega) = G(t, \omega)$$
$$F(t_o, \omega) = C(\omega)$$

Remplaçons ce système par une équation intégrale :

$$F(t, \omega) + \int_{t_o}^{t} A(s, \omega) F(s, \omega) \, ds = C(\omega) + \int_{t_o}^{t} G(s, \omega) \, ds$$

Appelons $H(t,\omega)$ le second membre fonction connue aléatoire de t, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et introduisons l'opérateur $\phi(\omega)$ de $(L^1(I))^n$ dans lui-même défini par :

$$\phi(\omega) : Y(t, \omega) = [y_o(t, \omega), \ldots y_{n-1}(t, \omega)]^t \rightarrow \int_{t_o}^{t} A(s, \omega) Y(s, \omega) \, ds$$

Par hypothèse les fonctions $y_i(t,\omega)$ sont intégrables sur I à ω fixé. Il s'agit maintenant de résoudre l'équation intégrale :

$$e) \quad (I + \phi(\omega)) F(., \omega) = H(., \omega)$$

Soit ϕ^k l'opérateur ϕ à la puissance k. Par induction, il vient aisément que :

$$\| \phi^k(\omega) Y(., \omega) \|_1 \leqslant \frac{K^k(\omega)}{k!} \| Y(., \omega) \|_1 (t - t_o)^k$$

où $\| \ \|_1$ désigne la norme dans $(L^1(I))^n$ soit $\|Y(.,\omega)\|_1 = \int_t \sqrt{\sum_{i=o}^{n-1} (y_i(t,\omega))^2} \, dt$ et où $K(\omega) = \max_{t \in I} \|A(t,\omega)\|$ avec $\|A(t,\omega)\|$ norme usuelle d'un opérateur de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.

De plus $H(t,\omega)$ est une fonction aléatoire du temps t et $A(t,\omega)$ est une F.A.O.L. De ce qui précède, l'unique solution $F(t,\omega)$ de l'équation intégrale e) a la forme d'une série convergente pour tout t de I = [a, b]

$$F(t, \omega) = (I + \phi(\omega))^{-1} H(t, \omega) = \sum_{j=o}^{\infty} (-1)^j \phi^j(\omega) H(t, \omega)$$

La fonction vectorielle $F(t,\omega)$ est aléatoire.

Cas 2

Supposons que I soit quelconque de $\bar{\mathbb{R}}$. Introduisons un sous-intervalle J compact de I qui contienne le point t_o. Alors en raison de 1, il existe une fonction aléatoire unique $f_J(t,\omega)$ dépendant de l'intervalle J telle que $\forall \omega \in \Omega$, $f_J(.,\omega) \in A^n(J)$ et telle que :

$$a)\ \tau f_J = g$$

$$b)\ (\frac{d}{dt})^j f_J(t_o, \omega) = c_j(\omega),\ j = o, \ldots, n-1$$

Comme la fonction f_J est uniquement déterminée sur l'intervalle J, il vient $\forall J_1, J_2$ sous-intervalles compacts de I contenant t_o, pour tout t de $J_1 \cap J_2$, $f_{J_1}(t,\omega) = f_{J_2}(t,\omega)$. Posons par définition $\forall t \in I$, $f(t,\omega) = f_J(t,\omega)$ où J est un intervalle fermé quelconque contenant t_o et t. La fonction $f(t,\omega)$ ainsi définie est aléatoire, appartient à $A^n(I)$ et vérifie presque-sûrement les conditions a) et b). De plus $f(t,\omega)$ est unique.■

Observation :

La propriété énoncée est à rapprocher du résultat suivant: si les coefficients $a_i(t)$, i = o,..., n d'un opérateur différentiel formel dépendent analytiquement d'un paramètre disons $\lambda \in \mathbb{C}$ et qu'il en soit de même pour la fonction g(t) et les constantes c_i, i = o,..., n-1, alors f dépend analytiquement de λ, uniformément en t sur tout sous-intervalle J compact de I.

Corollaire 4-3-1

Soit τ un O.A.D.F. presque-sûrement régulier et d'ordre n, dans un intervalle I de $\bar{\mathbb{R}}$. Soit λ fixé de $\mathbb{C}$. Alors la variété linéaire des solutions f de l'équation homogène $(\tau - \lambda I)\, f = o$ où f est aléatoire, est pour presque tout ω de Ω, de dimension n.

Démonstration :

Il existe n fonctions $u_i(t,\omega,\lambda)$ i = 1,..., n aléatoires et telles que, pour presque tout ω de Ω, d'une part :

$$u_i(.,\omega,\lambda) \in A^n(I) \text{ et d'autre part :}$$

$$a)\ (\tau(\omega) - \lambda I)\, u_i(t,\omega,\lambda) = o$$

$$b)\ (\frac{d}{dt})^j u_i(t_o,\omega,\lambda) = \delta_{j,\,i-1} \qquad o < i \leqslant n \qquad o \leqslant j < n$$

pour un t_o arbitraire de I.

Pour ω fixé, ces fonctions $u_i(., \omega, \lambda)$ sont indépendantes comme ayant un Wronskien non nul. De plus, toute solution $f(t, \omega, \lambda)$ aléatoire de $(\tau - \lambda I)\, f = o$ et telle que $\forall \omega \in \Omega$, $f(., \omega, \lambda)$ appartienne à $A^n(I)$, s'exprime par la formule :

$$f(t, \omega, \lambda) \underset{\text{p. s.}}{=} \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega, \lambda)\, u_i(t, \omega, \lambda)$$

Les coefficients $b_i(\omega,\lambda)$ uniquement déterminés par un système de n équations linéaires indépendantes sont mesurables (à λ fixé). Pour presque tout ω de Ω, la famille $\{u_i(t,\omega,\lambda);\ i = 1,\ldots,\ n\}$ de solution de a) est une base pour la variété des solutions aléatoires de a) qui, pour ω fixé quelconque de Ω, appartiennent à $A^n(I)$.■

Corollaire 4-3-2

Soit τ un O.A.D.F. presque-sûrement régulier et d'ordre n dans un intervalle $I \subset \bar{R}$. Considérons les deux équations :

$$1)\ (\tau(\omega) - \lambda I)\, f(t, \omega, \lambda) = o$$

$$2)\ (\tau(\omega) - \lambda I)\, f(t, \omega, \lambda) = g(t, \omega)$$

où $g(t,\omega)$ est une fonction aléatoire. Si $f(t,\omega)$ est une solution aléatoire quelconque de 2) alors $f(t,\omega)$ possède la représentation :

$$f(t, \omega) \underset{\text{p. s.}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i(t, \omega, \lambda) \int_{t_o}^{t} v_{i,n}(s, \omega, \lambda) \frac{g(s, \omega)}{a_n(s, \omega)}\, ds$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega, \lambda)\, u_i(t, \omega, \lambda)$$

où les fonctions $u_i(t,\omega,\lambda)$, $i=1,\ldots,n$ aléatoires sont p.s. des solutions indépendantes de 1), appartiennent à $A^n(I)$ pour presque tout ω de Ω et déterminent de façon unique les fonctions $v_i(t,\omega,\lambda)$, $i=1,\ldots,n$ aléatoires et où les coefficients $b_i(\omega,\lambda)$, $i=1,\ldots,n$ sont des variables aléatoires complexes.

Démonstration :

Sauf sur un ensemble N négligeable de Ω, en conservant les notations de la proposition 1, les équations 1) et 2) sont respectivement équivalentes à :

$$1')\ \left(\frac{d}{dt} + A(t, \omega, \lambda)\right) F(t, \omega, \lambda) = o$$

$$2')\ \left(\frac{d}{dt} + A(t, \omega, \lambda)\right) F(t, \omega, \lambda) = G(t, \omega)$$

La solution générale F de l'équation 2') s'obtient en additionnant une solution particulière F_p de l'équation 2') à la solution générale F_G de l'équation 1'). Soit $F = F_p + F_G$.

Utilisons la base $\{u_i(t,\omega,\lambda),\ i=1,....n\}$ des solutions de 1) dont l'existence est démontrée dans le corollaire 1.

Introduisons la notation vectorielle pour obtenir une base de solution de 1'):

$$U_i(t,\omega,\lambda) = [u_i^{(o)}(t,\omega,\lambda),.... u_i^{(n-1)}(t,\omega,\lambda)]^t,\ i = 1,...., n$$

De cette façon, le corollaire 1 affirme que :

$F_G = \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega,\lambda)\, U_i(t,\omega,\lambda)$ où les fonctions $b_i(\omega,\lambda)$, $i=1,....,n$ sont quelconques mesurables (à λ fixé).

Par une méthode de variation des constantes $b_i(\omega,\lambda)$, $i=1,....,n$ sur la solution générale F_G, obtenons une solution particulière F_p. Tout calcul fait, en introduisant les matrices :

$$U = \begin{bmatrix} u_1^{(o)} ..... u_n^{(o)} \\ ..... \\ u_1^{(n-1)} .....u_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } V = U^{-1}, \text{ il vient}$$

$F_p(t,\omega,\lambda) = U(t,\omega,\lambda) \int_{t_o}^{t} V(s,\omega,\lambda)\, G(s,\omega)\, ds$. Comme fonction de ω, à s et λ fixés, l'opérateur $V(s,\omega,\lambda)$ est mesurable. Finalement, en considérant la première ligne de la relation vectorielle, la solution quelconque mesurable de 2 prend la forme :

$$f(t,\omega,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t,\omega,\lambda) \int_{t_o}^{t} v_{i,n}(s,\omega,\lambda) \frac{g(s,\omega)}{a_n(s,\omega)}\, ds$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega,\lambda)\, u_i(t,\omega,\lambda) \blacksquare$$

Soit $\tau(\omega) = \sum_{j=o}^{n} a_j(t,\omega) (\frac{d}{dt})^j$ un opérateur différentiel formel aléatoire presque-sûrement régulier, symétrique et d'ordre n dans un intervalle $I \subset \bar{R}$. Dans ces conditions, il est possible d'introduire

l'opérateur linéaire $T_o(\omega)$ pour presque tout ω de Ω, défini sur $D_o = \{f;\ f \in A^n(I),\ f,\ f^{(n)} \in L^2(I)$ support de f est un compact de $\overset{\circ}{I}\}$, sous-espace vectoriel dense de $H = L^2(I)$ par la formule :

$$\forall\ f \in D_o\ T_o(\omega)\ f = \tau(\omega)f.$$

Si $T_o{}^*(\omega)$ est l'adjoint de $T_o(\omega)$ alors :

$$T_o^*(\omega)\ f = \tau(\omega)\ f \text{ pour tout f de } D_o^* = \{f;\ f \in A^n(I),\ f,\ \tau(\omega)\ f \in L^2(I)\}$$

(cf. [11], p. 1 291). On a $T_o(\omega) \subset T_o{}^*(\omega)$.

Quel que soit $T(\omega)$ extension auto-adjointe de $T_o(\omega)$, il est possible de définir sur le domaine $D(\omega)$ de $T(\omega)$ un produit scalaire :

$$< f,\ g >_{D(\omega)} = < f,\ g > + < T(\omega)f,\ T(\omega)g > \forall f,\ g \in D(\omega)$$

Avec ce produit scalaire, le sous-ensemble $D(\omega)$ de H devient un nouvel espace de HILBERT. (cf. [11], p. 1 297). Observons que D_o est indépendant de ω tandis que $D(\omega)$ dépend de ω.

Théorème 4-3-2

Soit τ un O.A.D.F. presque-sûrement régulier, symétrique et d'ordre n dans un intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $T_o(\omega)$ l'opérateur linéaire de domaine $D_o = \{f; f \in A^n(I),\ f^{(o)}, f^{(n)} \in L^2(I)$, support de f est compact dans $]a,b[\}$ et défini pour tout ω de Ω par l'équation $\forall\ f \in D_o\ T_o(\omega)f = \tau(\omega)f$.

Pour r fixé entre o et n, soient $\{w_{i,j}(a,\omega),\ i=1,...r,\ j=1,...n\}$ ainsi que $\{w_{i,j}(b,\omega),\ i=r+1,...,n,\ j=1,...,n\}$, n^2 variables aléatoires complexes de façon que :

$$B_i^{(a)}(\omega)\ f \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} w_{i,k}(a,\omega)\ f^{(k-1)}(a) = o,\ i=1,....,\ r$$

$$B_i^{(b)}(\omega)\ f \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} w_{i,k}(b,\omega)\ f^{(k-1)}(b) = o,\ i=r+1,...,\ n$$

soient presque-sûrement n conditions symétriques et indépendantes de frontière. Alors si $T(\omega)$ est l'extension auto-adjointe de $T_o(\omega)$ relativement à ces conditions de frontière, $T(\omega)$ est un opérateur aléatoire auto-adjoint.

La démonstration de ce théorème utilisera les deux lemmes énoncés ci-après :

Lemme 1

Soit τ un O.A.D.F. défini sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et presque-sûrement régulier et d'ordre n; on considère l'équation différentielle :

$$1)\ (\tau(\omega) - \lambda\ I)\ f(t, \omega, \lambda) = o$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, ainsi que les r conditions de frontière $B_i^{(a)}(\omega) = o$ en a, introduites dans le théorème. Alors il existe une famille $\{f_j(t,\omega,\lambda),\ j = r+1,\ldots,\ n\}$ de fonctions aléatoires qui constitue presque-sûrement une base pour les solutions de 1) vérifiant les r conditions $B_i^{(a)}(\omega) = o$ de frontière.

Démonstration :

Sauf pour ω d'un ensemble N négligeable convenable, les r conditions $B_i^{(a)}(\omega)$ de frontière ont la forme :

$$B_i^{(a)}(\omega)\ f = \sum_{k=1}^{n} w_{i,k}(a, \omega)\ f^{(k-1)}(a) = o \qquad i = 1, \ldots, r$$

et sont indépendantes. Appelons $\mathbb{W}(a,\omega)$ la matrice r x n ayant pour coefficients les $w_{i,k}(a,\omega)$ mesurables. Pour $\omega \in N^c$, il existe une sous-matrice $\mathbb{W}_{k_1,\ldots,k_r}$ carrée r x r de $\mathbb{W}(a,\omega)$, inversible correspondant aux colonnes $k_1,\ldots, k_r$ d'ordre r. Soit $\Delta_{k_1,\ldots,k_r}$ le déterminant de $\mathbb{W}_{k_1,\ldots,k_r}$. Introduisons les ensembles mesurables $A_{k_1,\ldots,k_r} = \{\omega, \Delta_{k_1,\ldots,k_r} \neq O\}$ correspondant à toutes les combinaisons de r colonnes prises entre n. L'union sur toutes ces combinaisons des ensembles $A_{k_1,\ldots k_r}$ est de probabilité 1. Introduisons alors des ensembles $B_{k_1,\ldots,k_r}$ disjoints deux à deux, tels que pour toute combinaison $k_1,\ldots,k_r$, on ait $B_{k_1,\ldots,k_r} \subset A_{k_1,\ldots,k_r}$ et tels que :

$$\Omega = N \cup \bigcup_{k_1,\ldots k_r} A_{k_1,\ldots,k_r} = N + \sum_{k_1,\ldots k_r} B_{k_1,\ldots,k_r}$$

Dorénavant soit un ensemble mesurable fixé $B_{k_1,\ldots,k_r}$ que nous pouvons supposer être $B_{1,\ldots,r}$.

Pour ω fixé de $B_{1,\ldots,r}$, le déterminant $\Delta_{1,\ldots,r}$ est non nul et la matrice $\mathbb{W}_{1,\ldots,r}$ est inversible. Il existe une base pour les solutions de 1) qui sont mesurables de Ω dans $\mathbb{C}$ pour t fixé quelconque de [a, b]. Soit $\{u_i(t,\omega,\lambda);\ i = 1,\ldots,\ n\}$ une telle base de façon que (corollaire 1) :

$$u_i^{(j)}(a, \omega, \lambda) = \delta_{j,\ i-1} \qquad o < i \leqslant n, \qquad o \leqslant j < n$$

La solution aléatoire générale de 1) s'écrit :

$$f(t, \omega, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega, \lambda)\, u_i(t, \omega, \lambda)$$

où les coefficients $b_i(\omega,\lambda)$ sont arbitraires aléatoires. Présentons le problème sous forme matricielle :

$$U(t, \omega, \lambda) = \begin{bmatrix} u_1^{(o)} & \cdots & u_n^{(o)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \qquad B(\omega, \lambda) = [b_1, \ldots, b_n]^t$$

$$F(\omega, \lambda) = [f^{(o)}, \ldots, f^{(n-1)}]^t$$

Les relations antérieures pour F deviennent :

$$F(t, \omega, \lambda) = U(t, \omega, \lambda)\, B(\omega, \lambda)$$
$$F(a, \omega, \lambda) = B(\omega, \lambda) \qquad \text{si } t = a$$

Les conditions de frontière prennent la forme :

$$\mathbb{W}(a, \omega)\, B(\omega, \lambda) = 0$$

Comme la première sous-matrice $\mathbb{W}_{1,2\ldots,r}(a,\omega)$ est inversible, il vient avec des notations évidentes :

$$[\mathbb{W}_{1,2\ldots,r}\ \mathbb{W}'] \begin{bmatrix} B_{1,2,\ldots,r} \\ B' \end{bmatrix} = 0 \text{ et par suite}$$

$$B_{1,2,\ldots,r} = -\mathbb{W}^{-1}_{1,2,\ldots,r}\, \mathbb{W}'\, B'$$

Considérons les $s = n-r$ colonnes B' suivantes : $B'_1 = [1,0,\ldots0]^t$, ... $B'_s = [0,0,\ldots,1]^t$. A chaque colonne B'_j $j = r+1,\ldots,n$, correspond une solution F_j de 1) pour ω fixé, mesurable, de $B_{1,\ldots,r}$ pour t fixé quelconque dans [a,b] et vérifiant les r conditions de frontière.

En répétant le procédé pour toutes les combinaisons $k_1,\ldots,k_r$ et en regroupant les résultats obtenus, nous définissons sur Ω une famille de s fonctions F_j $j = r+1,\ldots,n$ qui constituent presque-sûrement une base pour les solutions de 1), qui satisfont les r conditions de frontière.

En conservant la première ligne $f_j^{(o)}$ de chaque colonne F_j nous obtenons le lemme 1.■

Lemme 2

Soit τ un O.A D.F. défini sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et presque-sûrement régulier symétrique et d'ordre n. On considère l'équation différentielle :

$$\tau(\omega)\, f(t, \omega) = 0$$

ainsi que les r conditions de frontière $B_i^{(a)}(\omega) = 0$ en a et les s = n-r conditions de frontière $B_i^{(b)}(\omega) = 0$ en b, introduites dans le théorème. Soit $T_o(\omega)$ l'opérateur linéaire de domaine D_o défini pour tout ω de Ω par l'équation $\forall f \in D_o \; T_o(\omega)f = \tau(\omega)f$.

On appelle $T(\omega)$ l'extension auto-adjointe de $T_o(\omega)$ relativement aux conditions de frontière. Pour tout λ de $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$, on introduit $R_\lambda(\omega)$ la résolvante de $T(\omega)$. Alors il existe une fonction $K(t,s,\omega,\lambda)$ définie sur $I \times I \times \Omega \times (\mathbb{C}\text{-}\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I \; K(t,.,\omega,\lambda) \in L^2(I)$ et telle que :

$$\forall t \in I \; \forall \omega \in \Omega \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}\text{-}\mathbb{R} \; \forall f \in L^2(I)$$

$$[R_\lambda(\omega)(f)](t) = \int_I K(t, s, \omega, \lambda)\, f(s)\, d\, s$$

Si $\{f_{a,j}(t,\omega,\lambda),\ j = r+1,\ldots.n\}$ est une base des solutions aléatoires de l'équation $(\tau(\omega) - \lambda I)\, f = 0$ satisfaisant en a, les r conditions de frontière $B_i^{(a)}(\omega) = 0$ et intégrables en moyenne quadratique dans un voisinage de a, et si $\{f_{b,j}(t,\omega,\lambda),\ j = 1,\ldots,r\}$ est une base des solutions aléatoires de l'équation $(\tau(\omega) - \lambda I)\, f = 0$ satisfaisant en b, les s conditions de frontière $B_i^{(b)}(\omega) = 0$ et intégrables en moyenne quadratique dans un voisinage de b, alors il existe une famille :

$$\{\gamma_{1,i,j}(\omega,\lambda),\ \gamma_{2,i,j}(\omega,\lambda),\ i = 1,\ldots,r,\ j = r+1,\ldots,n\}$$

unique de fonctions complexes mesurables telles que :

$$K(t, s, \omega, \lambda) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \gamma_{1,i,j}(\omega, \lambda)\, f_{b,i}(t, \omega, \lambda)\, \overline{f_{a,j}(s, \omega, \overline{\lambda})} & s < t \\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \gamma_{2,i,j}(\omega, \lambda)\, \overline{f_{b,i}(t, \omega, \overline{\lambda})}\, f_{a,j}(s, \omega, \lambda) & s > t \end{cases}$$

Démonstration :

Pour ω fixé de Ω, les propriétés du noyau $K(t,s,\omega,\lambda)$ sont démontrées dans [11], p. 1 327 cor. 14. Il suffit uniquement de vérifier que la façon d'obtenir les fonctions $\gamma_{i,j}(\omega,\lambda)$ à partir de la base $f_{a,j}$ des s fonctions indépendantes qui satisfont les r conditions de frontière en a et de la base $f_{b,j}$ des r fonctions indépendantes qui satisfont les s conditions de frontière en b et dont l'existence a été prouvée dans le lemme 1, donne des fonctions $\gamma_{i,j}$ mesurables de ω quel que soit λ fixé dans $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$.

Pour cela, en premier lieu, le noyau $K(t,s,\omega,\lambda)$ prend la forme :

$$K(t,s,\omega,\lambda) = \begin{cases} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j(t,\lambda,\omega)\,\overline{f_{a,j}}(s,\omega,\overline{\lambda}) & s < t \\ \sum_{i=1}^{r} \beta_i(s,\lambda,\omega)\,\overline{f_{b,i}}(t,\omega,\overline{\lambda}) & s > t \end{cases}$$

où les coefficients α_j, $j = r+1,\ldots,n$ et β_i, $i = 1,\ldots,r$ vérifient n conditions de saut en un point t_o arbitraire de $]a,b[$ (cf. [11], p. 1 316, lemme 6) et par suite $\alpha_j(t,\lambda,\omega)$ et $\beta_i(s,\lambda,\omega)$ sont des fonctions aléatoires.

Ensuite pour ω fixé de Ω, les coefficients α_j et β_i vérifient les équations différentielles :

$$(\tau(\omega) - \lambda I)\,\alpha_j(t,\lambda,\omega) = 0 \qquad j = r+1,\ldots,n$$

$$(\tau(\omega) - \lambda I)\,\beta_i(s,\lambda,\omega) = 0 \qquad i = 1,\ldots,r$$

De plus, les α_j sont intégrables en moyenne quadratique dans un voisinage de b tandis que les β_i sont intégrables en moyenne quadratique dans un voisinage de a. Il vient :

$$\alpha_j(t,\lambda,\omega) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{1,i,j}\, f_{b,i}(t,\omega,\lambda) \qquad j = r+1,\ldots,n$$

$$\beta_i(s,\lambda,\omega) = \sum_{j=r+1}^{n} \gamma_{2,i,j}\, f_{a,j}(s,\omega,\lambda) \qquad i = 1,\ldots,r$$

En faisant maintenant varier ω dans Ω, les fonctions α_j et β_i étant mesurables et déterminant de façon unique les coefficients $\gamma_{i,j}$, ces coefficients sont des fonctions aléatoires.■

Passons maintenant à la démonstration du théorème :

Pour tout ω en dehors d'un ensemble N négligeable convenable, soit $\{E_\lambda(\omega),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ la famille spectrale de l'opérateur auto-adjoint $T(\omega)$, si l'on note $E(\lambda_1,\lambda_2,\omega) = E_{\lambda_2}(\omega) - E_{\lambda_1}(\omega)$ alors [11] page 1.202, $\forall f \in L^2(I)$:

$$E(\lambda_1,\lambda_2,\omega)\,f = \lim_{\delta\to o}\ \lim_{\epsilon\to o+} \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} [R(\lambda - i\epsilon,\omega) - R(\lambda + i\epsilon,\omega)]\,f\,d\lambda$$

En raison des lemmes 1 et 2, la résolvante $R(\lambda,\omega)$ est une fonction aléatoire pour $\lambda\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ et comme les limites en ϵ et en δ existent, la famille $\{E_\lambda(\omega);\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ est une fonction aléatoire.■

Corollaire :

Soit τ un O.A.D.F. presque-sûrement régulier, symétrique et d'ordre n dans un intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $\tau(\omega)\, f(t,\omega) = 0$ ainsi que les n conditions $B_i(\omega)$ de frontière, introduites dans le théorème 2. Soit $T_o(\omega)$ l'opérateur linéaire de domaine D_o et défini pour tout ω de Ω par l'équation $\forall f \in D_o \; T_o(\omega)f = \tau(\omega)f$.

Soit $T(\omega)$ quand elle existe l'extension auto-adjointe de $T_o(\omega)$ relativement aux conditions de frontière. Si pour un ensemble négligeable N, on a $\forall \omega, \omega' \in N^c$ d'une part $\tau(\omega)\, \tau(\omega') = \tau(\omega')\, \tau(\omega)$ et d'autre part $B_i(\omega)$ et $B_i(\omega')\, \tau(\omega)$, 2 n conditions symétriques et indépendantes de frontière pour l'opérateur $\tau(\omega')\, \tau(\omega)$ alors il existe une famille spectrale E_λ étalée sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et une fonction $\theta(\lambda,\omega)$ aléatoire vérifiant :

$$T(\omega) \underset{\text{p. s.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \theta(\lambda, \omega)\, d\, E_\lambda$$

Démonstration :

Soient ω et ω' en dehors de l'ensemble négligeable N. Pour tout f de $D_{T(\omega)T(\omega')} \cap D_{T(\omega')T(\omega)}$, nous obtenons :

$$T(\omega)\, T(\omega')f = \tau(\omega)\, \tau(\omega')f = \tau(\omega')\, \tau(\omega)f = T(\omega')\, T(\omega)f$$

Si $D_{T(\omega)T(\omega')} = D_{T(\omega')T(\omega)}$ alors $T(\omega)\, T(\omega') = T(\omega')\, T(\omega)$ et $T(\omega)T(\omega')$ est auto-adjoint; réciproquement si $T(\omega)\, T(\omega')$ est auto-adjoint alors les deux domaines coïncident. Or le domaine $D_{T(\omega)T(\omega')}$ est défini par les 2 n conditions de frontière $B_i(\omega')$ et $B_i(\omega)\, \tau(\omega')$ relativement à $\tau(\omega)\, \tau(\omega')$. L'opérateur $T(\omega)\, T(\omega')$ est auto-adjoint si et seulement si ces 2 n conditions de frontière sont symétriques et indépendantes.

Les opérateurs $T(\omega)$ pour $\omega \in N^c$ sont compacts (cf. [11] page 1.330) et en considérant leur spectre discret, la famille $\{\text{Arctg}T(\omega),\ \omega \in N^c\}$ engendre une étoile algèbre de BANACH commutative. Comme l'espace de HILBERT $L^2(I)$ est séparable, l'espace Λ de GELFAND pour cette algèbre est isomorphe à un compact de $\mathbb{R}$ (cf. [36], p. 355) et de plus :

$$\forall \omega \in N^c \quad \text{Arc tg}T(\omega) = \int \alpha(\lambda,\omega)\, d\, E_\lambda$$

où E_λ est une famille spectrale étalée sur Λ et où $\alpha(\lambda,\omega)$ est une fonction aléatoire à trajectoires p.s. continue (th. 3-5-3). En revenant aux opérateurs $T(\omega)$, nous obtenons le corollaire :

$$T(\omega) = \int \theta(\lambda, \omega)\, d\, E_\lambda$$

avec $\theta(\lambda, \omega) = \text{t g}(\alpha(\lambda, \omega))$. ■

■

CONCLUSION :

Dans l'espace L des opérateurs linéaires bornés de l'espace de HILBERT H dans lui-même, on définit une σ-algèbre B qui est suffisamment vaste, dans le cas où l'espace de HILBERT est séparable, pour contenir entre autres les sous-ensembles très utilisés suivants : l'ensemble L_s des opérateurs symétriques, l'ensemble des opérateurs compacts, l'ensemble des opérateurs normaux l'ensemble U des opérateurs unitaires, l'ensemble des projecteurs, l'ensemble des opérateurs inversibles. Dans le cas où H n'est pas séparable, on ne sait pas si ces ensembles appartiennent encore à B; aussi cette hypothèse intervient dès le début pour étudier les propriétés probabilistes de l'espace L. Une base de H séparable a été notée $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Pour les fonctions L(.) de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans (L,B), il faut introduire plusieurs notions de mesurabilité et distinguer les limites des suites de fonctions étagées définies sur $(\Omega,\mathcal{A})$ suivant les topologies de L mais aussi il est utile de permettre aux fonctions étagées de prendre une famille dénombrable de valeurs dans L. Un opérateur aléatoire linéaire en abrégé O.A.L. est alors la limite pour la topologie forte de L d'une suite de fonctions étagées à image dénombrable.

Pour étudier les probabilités images dans (L,B) de la probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{A})$ par des O.A.L., on introduit les notions d'Espérance Mathématique et d'Espérance Conditionnelle. Le théorème de RADON-NIKODYM énoncé au chapitre 2 § 1 sert précisément pour définir l'espérance conditionnelle. L'étude de la convergence des séries d'O.A.L. centrés s'effectue par la méthode des martingales. Un critère est établi pour obtenir la convergence forte presque-sûre de telles séries. La notion de processus aléatoire séparable à valeurs dans L est présentée au chapitre 2 § 3.

Comme l'espace L est un espace vectoriel, la famille des fonctions caractéristiques marginales relatives à une base de L, est un outil commode pour définir les propriétés des probabilités images. Ainsi un critère sur les fonctions caractéristiques marginales, est donné pour reconnaître si la probabilité image est concentrée sur L_s.

Dans l'espace H, il est possible d'effectuer des rotations décrites par les opérateurs unitaires U transformant soit un nombre fini de vecteurs de base, soit une famille infinie. Ces rotations transforment L élément de L en $U\,L\,U^{-1}$. Sur les fonctions caractéristiques marginales, il est possible d'obtenir des relations simples afin que la probabilité image soit invariante pour de telles rotations.

Il n'existe pas de probabilités σ-additives invariantes pour toutes les rotations et telles que les variables $\{\langle L(.)e_i, e_j\rangle, i, j \in \mathbb{N}\}$ soient indépendantes. Ce résultat est à rapprocher de ceux de la théorie des probabilités cylindriques.

A tout opérateur symétrique et compact, il est possible d'associer de façon canonique une suite unique λ de valeurs propres et une suite z de vecteurs propres ainsi que d'identifier λ à un élément de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, R^{\otimes\mathbb{N}})$ et z à un élément de $(H^{\mathbb{N}}, B_H{}^{\otimes\mathbb{N}})$. Dans ces conditions, l'application $L \to (\lambda, z)$ est inversible sur son image et mesurable. La décomposition obtenue ressemble au passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ mais dans ce cas les problèmes de mesurabilité sont triviaux. Lorsque l'O.A.L. est p.s. dans une étoile algèbre $\mathbb{B}$ de BANACH, commutative de l'espace L, il existe une famille spectrale E_λ sur l'espace Λ de GUELFAND de $\mathbb{B}$ et une fonction aléatoire complexe $f(\lambda,\omega)$ à trajectoire p.s. continue telle que :

$$L(.) \underset{\text{p. s.}}{=} \int f(\lambda, .)\, d\, E_\lambda$$

Une première application des résultats antérieurs a porté sur l'étude d'un semi-groupe continu et borné d'opérateurs de L. L'opérateur infinitésimal de ce semi-groupe peut être non borné et pour $\lambda > 0$, on introduit sa résolvante $\{R(\lambda),\ \lambda > 0\}$. Le semi-groupe constitue un processus aléatoire si et seulement si $\{R(\lambda),\ \lambda > 0\}$ est un processus aléatoire. Ainsi les propriétés de mesurabilité de l'opérateur infinitésimal non borné du semi-groupe aléatoire, sont décrites à l'aide d'un processus aléatoire.

L'opérateur densité d'un système quantique est l'Espérance Mathématique d'un O.A.L. par rapport à une probabilité discrète qui lui est canoniquement associée. Il peut être utile de considérer les autres probabilités dans (L, B) de façon cependant que l'Espérance Mathématique reste égale à l'opérateur densité initial. L'évolution du système quantique se traduit par des équations aux dérivées partielles sur les fonctions caractéristiques marginales. Ces équations prennent une forme maniable lorsque l'Hamiltonien "H" du système quantique est mis sous une forme diagonale. La méthode est appliquée à l'oscillateur harmonique perturbé de façon aléatoire. Des généralisations sont à prévoir lorsque l'Espérance Mathématique n'est pas astreinte à être un opérateur densité.

L'étude des équations différentielles $\sum_{k=0}^{n} a_k(t,\omega) \dfrac{d^k}{dt^k} f(t,\omega) = g(t,\omega)$

pour t sur un intervalle I de $\bar{\mathbb{R}}$ fait intervenir des opérateurs $T(\omega)$ non bornés associés à $\tau(\omega) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t,\omega) \dfrac{d^k}{dt^k}$ sur l'espace de HILBERT $L^2(I)$. Lorsque les coefficients $a_k(t,\omega)$ sont des processus aléatoires complexes, dans le cas où l'opérateur $T(\omega)$ est auto-adjoint, les propriétés de mesurabilité de cet opérateur s'expriment au moyen de sa famille spectrale qui constitue alors un processus aléatoire. Le cas particulier d'opérateurs $T(\omega)$ commutant deux à deux est à rapprocher de l'étude des séries de fonctions orthogonales à coefficients aléatoires. Le lien entre équation différentielle aléatoire et O.A.L. a été seul étudié et une théorie semblable dans le cas d'équations aux dérivées partielles à coefficients aléatoires reste à effectuer.

■

BIBLIOGRAPHIE

1) N.I. AKHIEZER, I.M. GLAZMAN : Theory of linear operator in Hilbert Spaces (Frederick Ungar P.C. 1961).

2) J. ALVAREZ de ARAYA et de BRUCQ : Opérateurs aléatoires linéaires bornés dans un espace de Hilbert séparable, C.R. Acad. Sc. Paris t. 267 p. 997.999. Série A.

3) BEBERIAN : Notes on Spectral Theory (Van Nostrand 1966)

4) BLANC-LAPIERRE, CASALS, TORTRAT : Méthodes Mathématiques de la Physique (Dunod),

5) BOURBAKI : Espaces Vectoriels Topologiques (Hermann).

6) BOURBAKI : Topologie Générale (Hermann).

7) N. DINCULEANU : Vector Measures (Pergamon Press 1967).

8) J. DIXMIER : Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Gauthier-Villars 1957).

9) J. L. DOOB : Stochastic Processes (Wiley N.Y. 1953).

10) P. DUBREIL : Algèbre (Gauthier-Villars 1963).

11) N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ : Linear Operators (Interscience Publishers 1963).

12) R. FORTET : Eléments de la théorie des probabilités (C.N.R.S. 1965).

13) H. FURSTENBERG : Non Commuting Randon Products, Trans. Amer. Math. Soc. 1963, Vol. 108 N° 3.

14) J. GINIBRE : Statistical Ensembles of Complex, Quaternion and Real Matrices, J. Math. Physics 1965, Vol 6 N° 3 p. 440-449.

15) G. G. GOULD : Integration over Vector-Valued Measures Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965) p. 193-225.

16) U. GRENANDER : Probabilities on algebraic structures (John Wiley 1963)

17) A. GROTHENDIECK : Espaces Vectoriels Topologiques, (Sociedade de Matematica Sao Paulo 1964).

18) I.M. GUELFAND, N.Y. VILENKIN : Generalized Functions (Academic Press 1964).

19) J. HAINIS : Randon Variables with values in Banach Algebras and random transformations in Hilbert Spaces, Bull. Soc. Math. Grèce N.S. 7 1966 fasc. 2 p. 179-223.

20) HANS : Random Operator Equations Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Stat. and Prob.

21) H. HELSON : Lectures on invariant subspaces (Academic Press 1964).

22) HILLE and PHILLIPS : Functional Analysis and Semi-Groups (A.M.S. Vol. XXXI).

23) R. ISAAC : A proof of the Martingale Convergence Theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) p. 842.844.

24) M. LOEVE : Probability Theory (D. Van Nostrand 1960).

25) A. MESSIAH : Mécanique Quantique (Dunod 1962).

26) M.L. METHA : Randon Matrices (Academic Press 1967).

27) METIVIER : Ann. Inst. Fourier 17 fasc. 2 1967 p. 175.208.

28) E. MOURIER : Thèse (Gauthier-Villars 1954).

29) E. MOURIER : Random Elements in linear Spaces, Proc. 5^{th} Berkeley Sympos. Math. Stat. and Prob.

30) J. NEVEU : Calcul des probabilités (Masson 1964).

31) J. NEVEU : Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique Ann. Inst. Fourier 15 fasc. 1 1965.

32) J. PELLAUMAIL : Sur la dérivation des mesures vectorielles, C.R. Acad. Sc. Paris t. 269 p. 904-907 série A.

33) M.M. RAO : Abstract Lebesgue-Radon-Nikodym theorems, Ann. Math. Pura (4) 76 (1967) p. 107-132.

34) M.M. RAO : Predictions non linéaires et Martingales d'opérateurs, C.R. Acad. Sc. Paris t. 267 p. 122-124 Série A.

35) RIEFFEL : The Radon-Nikodym, Theorem for the Bochner Integral, Trans. Amer. Math. Soc. May 1968 Vol. 131 N°2.

36) F. RIESZ et B. NAGY : Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Akadémiai Kiado Budapest 1952.

37) SCALORA : Abstract martingale convergence theorem, Pacific J. Math. 11 1961 p. 347-374.

38) L. SCHWARTZ : Functional Analysis (New York Universtiy 1964).

39) G.F. SIMMONS : Introduction to Topology and Modern Analysis (Mac Graw Hill 1963).

40) M.H. STONE : Linear Transformations in Hilbert Spaces (Amer, Math. Soc. Coll. Vol. 15 1964).

41) E. WIGNER : On the distribution of the roots of certain symmetrics matrices (Annals of Math. March 1958 Vol. 67 N° 2)

42) K. YOSIDA : Functional Analysis (Springer Verlag 1965).

■

NOTATIONS

$\mathfrak{A}$	1-1	σ-algèbre de Boole d'un ensemble quelconque Ω
$A^n(I)$	4-3	Soit I un intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$, ensemble des fonctions complexes définies sur I telles que $f^{(o)}$, ..., $f^{(n-1)}$ existent et telles que $f^{(n-1)}$ sont absolument continues sur tout sous-intervalle compact de I.
B	1-1	σ-algèbre de Boole de l'espace L
B_c	3-4	$L_c \cap B$
B_s		$L_s \cap B$
B_U	3-4	$L_U \cap B$
$\mathbb{C}$		Corps des nombres complexes
C^n		Ensemble des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre n et à dérivées continues.
$D\text{-}\int$	1-4	Intégrale faible
D_o	4-3	$D_o = \{f,\ f \in A^n(I),\ {}_o f^{(o)},\ f^{(n)} \in L^2(I)$, support de f compact de $I\}$
D_T	4-3	Domaine de définition de l'opérateur auto-adjoint T
E	1-5	Espérance Mathématique
E^{α}	2-2	Espérance Conditionnelle
$\{e_i,\ i \in I\}$	0-1	Base de l'espace de Hilbert H
$\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$	0-1	Base de l'espace de Hilbert H séparable
$\{E_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$[36] p. 271		Famille spectrale d'un opérateur auto-adjoint T
F.A.O.L.	2-3	Fonctions aléatoires à valeurs des opérateurs linéaires bornés sur H.
H	4-2	Hamiltonien d'un système quantique
H	0-1	Espace de Hilbert
H_n	0-2	Espace de Hilbert engendré par les vecteurs de base e_1, e_2, ..., e_n

H_o	1-6	Espace des combinaisons linéaires, finies et rationnelles des vecteurs $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$
i, $\hat{\imath}$		Notation des nombres imaginaires
Im		Partie imaginaire de
L		Elément de L
L	0-1	Espace des opérateurs linéaires bornés de H dans H
L_n	3-1	Espace des matrices carrées n x n
$L_{s,n}$	3-1	Espace des matrices carrées symétriques n x n
$L_1 = L_d$ $L_2 = L_f$ $L_4 = L_u$	0	Espace L muni respectivement des topologies faibles, fortes et uniformes
L_s	0-5	Sous ensemble de L des opérateurs symétriques
L_c	3-4	Sous ensemble de L des opérateurs symétriques et compacts
$(L_1)'$	0-4	Dual topologique de L_1
$(L_1)'_b$	0-4	Dual topologique de L_1 muni de la topologie de la convergence sur tout borné
$L^p(I)$	4-3	Ensembles des fonctions de puissance p intégrable Lebesgue sur l'intervalle I
$\mathbb{L}_{1,f}$	1-5	Espace vectoriel des fonctions mesurables L(.) de Ω dans L tel que $\int \|L(\omega)\ x\|\ dP(\omega) < \infty$ pour tout x de H.
M	1-1	$M = \underset{i,j}{\pi} \mathbb{C}_{i,j}$
$\mathbb{N}$		Ensembles des entiers naturels $\{1, 2, \ldots..n, \ldots.\}$
O.A.A.	4-3	Opérateur aléatoire auto-adjoint
O.A.L.	1-3	Opérateur aléatoire linéaire
O.A.L.C.	3-4	Opérateur aléatoire linéaire compact
O.A.L. intégrable	1-5-2	Opérateur aléatoire linéaire intégrable
P(.)		Fonction de probabilité

P_J	1	Projecteur sur l'espace de Hilbert engendré par $\{e_i,\ i \in J\}$
p.s.		presque-sûre
$\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}}$		Ensemble des réels, ensemble des réels étendus
$\mathbb{R}^+$		Ensemble des réels non négatifs
Re		Partie réelle de
$R(\lambda,\omega)$		Si $T(\omega)$ est un opérateur linéaire dépendant de ω, $R(\lambda,\omega) = (T(\omega)-\lambda I)^{-1}$
S		$S = \{x,\ x \in H\ \ \|x\| \leqslant 1\}$
S^*	0-2	$S^* = \{L,\ L \in L\ \ \|L\| \leqslant 1\}$
S_N^*	0-2	$S_N^* = \{L,\ L \in L\ \ \|L\| \leqslant N\}$
$\mathcal{S}$		Semi-algèbre de Boole
U		Sous ensemble de L des opérateurs unitaires
V.A.O.L.	1-3-2	Variable aléatoire à valeurs dans L
x, y, z		Eléments de H
Λ	3-5	Espace de Gelfand (d'une étoile algèbre de Banach commutative)
λ		Eléments de Λ
μ, ν		Mesures σ-additives
π		Symbole de produit
ρ	4-2	Opérateur densité
$\rho_n(L)$	3-1	$\rho_n(L) = \sum_{j,k \leqslant n} (u_{j,k} M_{j,k} + v_{j,k} N_{j,k})$ avec $L = M + iN$
Σ		Symbole de somme
$\tau(\omega)$	4-3	$\tau(\omega) = \sum_{i=o}^{n} a_i(t,\omega) (\frac{d}{dt})^i$
φ, ψ, χ		Fonctions caractéristiques
Ω		Ensemble quelconque
ω		Elément de Ω

SYMBOLES

$\forall$	quel que soit
$\exists$	il existe
$\in$	élément de
$\Longrightarrow$	implication
T^*	adjoint de T
T^{-1}	inverse de T
$\|\|L\|\|$	norme de $L \in L$
$[\quad]^t$	transposé du vecteur ligne [ ]
■	fin de démonstration
$\subset$	inclusion
$\cap$	intersection
$\cup$	union
$+, \Sigma$	union d'ensembles disjoints
N^c	complémentaire de l'ensemble N
$\{x_o\}$	ensemble composé du point x_o
$\{x; P\}$	ensemble composé des x vérifiant P
$f: x \to f(x)$	fonction f qui à x associe f (x)
$\|x\rangle\langle x\|$	projecteur sur x (cf [25] p. 220)

Imprimerie SAMACETA
92, Rue de Richelieu
PARIS 2ème

Dépot légal nº 0/0405
3ème Trimestre 1970